УДК 004.9

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ QR-РАЗЛОЖЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ NOMOTEX

Зубарев К.М., Киреева Е.А., Дерябина Г.С., Милехина Е.Н., Волков В.Ю.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», Москва, Российская Федерация, e-mail: zubarevkm@bmstu.ru

Статья посвящена особенностям методики изучения QR-разложения матриц в цифровой образовательной среде Nomotex. Цель исследования – разработать алгоритм интерактивной визуализации различных методов нахождения QR и автоматизации контроля знаний. В работе рассмотрены различные способы нахождения QR-разложения, включая метод отражений Хаусхолдера и метод вращений Гивенса, и их геометрическая интерпретация. Авторами разработаны и внедрены специализированные компьютерные модули, которые наглядно демонстрируют пошаговое преобразование произвольной матрицы к верхнетреугольному виду. Кроме того, предложен алгоритм автоматической генерации задач по QR-разложению для индивидуальной практики студентов и реализована система автоматизированной поэтапной проверки решений. Внедрение этих инструментов обеспечило интерактивность учебного процесса, позволило избежать перегрузки вычислениями и предоставило мгновенную обратную связь. Результаты тестирования и внедрения разработанных алгоритмов в учебный процесс подтверждают, что использование платформы Nomotex для изучения QR-разложения повышает наглядность преподавания и способствует более глубокому пониманию материала при одновременном снижении нагрузки на преподавателя. Проведённое исследование вносит вклад в методику преподавания технических дисциплин, демонстрируя, как современная цифровая платформа способна усилить методическую составляющую курса.

Ключевые слова: цифровая образовательная среда NOMOTEX, QR-разложение, метод Гивенса, метод Хаусхолдера, автоматическая генерация заданий, проверка знаний, линейная алгебра

STUDYING QR DECOMPOSITION FEATURES IN THE NOMOTEX DIGITAL LEARNING SYSTEM

Zubarev K.M., Kireeva E.A., Deryabina G.S., Milehina E.N., Volkov V.Yu.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Bauman Moscow State Technical University», Moscow, Russian Federation, e-mail: zubarevkm@bmstu.ru

The article focuses on the specifics of the methodology for studying QR matrix decomposition within the Nomotex digital educational environment. The primary objective of the research is to enhance the effectiveness of mastering this topic through the use of interactive visualization tools and automated knowledge assessment. The work examines various methods for computing the QR-decomposition, including the Householder reflections method and the Givens rotations method, along with their geometric interpretations. The authors have developed and implemented specialized computer modules that provide a clear, step-by-step visualization of the transformation of an arbitrary matrix into an upper-triangular form. Furthermore, the study proposes an algorithm for the automatic generation of QR-decomposition problems for students' individual practice and has realized a system for automated step-by-step verification of solutions. The implementation of these tools has ensured the interactivity of the educational process, helped to avoid computational overload, and provided students with instant feedback on their performance. The results of testing and integrating the developed algorithms into the curriculum confirm that using the Nomotex platform for studying QR-decomposition enhances the clarity of teaching and promotes a deeper understanding of the material, while simultaneously reducing the instructor's workload. The conducted research contributes to the methodology of teaching technical disciplines by demonstrating how a modern digital platform can strengthen the methodological framework of a course, making complex numerical methods more accessible and engaging for students through dynamic visual aids and automated support systems.

Keywords: DLS Nomotex, QR decomposition, Givens rotation method, Householder reflection method, generation task conditions, automatic verification, linear algebra

Введение

QR-разложение матриц является одним из фундаментальных инструментов линейной алгебры и вычислительной математики. Оно находит широкое применение в решении переопределенных систем линейных уравнений, вычислении собственных значений и многих других задачах [1; 2]. Понимание алгоритмов построения QR-разложения, таких как метод отражений и метод вращений, а также их геометрической интерпретации является важной составляющей математической подготовки студентов технических специальностей [3].

Однако процесс изучения и преподавания этой темы сопряжен с определенными трудностями. Сложность вычислительных процедур, необходимость визуализации геометрических преобразований и обеспечение эффективной практической отработки навыков студентами требуют специальных подходов. Традиционные методы обучения, основанные на ручных вычислениях, часто не позволяют в полной мере продемонстрировать эффективность и суть алгоритмов, кроме того, проверка результатов выполнения заданий по QR-разложению вручную является трудоемкой задачей для преподавателя, особенно при большом потоке студентов.

В статье рассматривается инструментарий для интерактивного представления QR-разложения на платформе ИОС Nomotex [4; 5]. Как было отмечено в работе [6], внедрение специализированных компьютерных средств визуализации позволяет сделать абстрактные алгебраические преобразования наглядными и интерактивными. Автоматизация процессов генерации вариативных индивидуальных заданий и проверки ответов студентов способна кардинально повысить эффективность обучения и снизить нагрузку на преподавателя [7-9].

Цель исследования – разработать программный комплекс интерактивной визуализации различных методов нахождения QR-разложения матрицы и реализовать алгоритм автоматизации контроля знаний по теме «QR-разложение».

Материалы и методы исследования

QR-разложение матрицы – это метод линейной алгебры, позволяющий представить матрицу A в виде произведения двух матриц: Q и R, где Q – ортогональная (или унитарная в случае комплексных чисел) матрица, состоящая из столбцов, которые являются ортонормированными векторами, а R – верхняя треугольная матрица. Для матрицы А размера $m \times n$ (где $m \geq n$) разложение выглядит так:

$$A = QR.$$

При нахождении QR-разложения для матриц маленького размера удобно использовать ортогонализацию Грама – Шмидта: столбцы матрицы A интерпретируются как векторы a_i, далее на основе этой системы векторов находится ортонормированная система векторов q_i, которые являются столбцами матрицы Q, а матрица R состоит из коэффициентов разложения векторов q_i по векторам a_i. При решении задач без использования ЭВМ этот метод является предпочтительным.

В программной реализации чаще всего используются два метода: вращений и отражений. Ключевое преимущество обоих методов заключается в их численной устойчивости. Поскольку преобразования Гивенса и Хаусхолдера являются ортогональными, они не усиливают вычислительную погрешность. Классический и модифицированный методы Грама – Шмидта существенно проигрывают в устойчивости. Из-за ошибок округления вычисляемые векторы q_i быстро теряют ортогональность, особенно если матрица A плохо обусловлена. Методы же вращений и отражений идеально сохраняют ортогональность в арифметике с плавающей точкой, что критически важно для итерационных алгоритмов, например QR-алгоритма для поиска собственных значений.

Результаты исследования и их обсуждение

В рамках данного исследования авторами были разработаны специализированные интерактивные программные модули, реализованные на платформе ИОС Nomotex, обеспечивающие геометрическую интерпретацию двух ключевых методов QR-разложения: вращений Гивенса и отражений Хаусхолдера.

Для метода вращений был разработан интерактивный пример, позволяющий наблюдать, как последовательность элементарных вращений в координатных плоскостях постепенно преобразует исходную матрицу к верхнетреугольному виду. Особое внимание уделяется визуализации преобразования столбцов матрицы: каждый столбец трактуется как вектор в многомерном пространстве, и пользователь может наблюдать, как эти векторы постепенно преобразуются в систему, которой будет соответствовать верхнетреугольная матрица. Для этого вектор a_1 должен оказаться на оси Ox, вектор a_2 в плоскости Oxy, а вектор a_3 может быть произвольным. На рисунке 1 можно видеть исходное положение векторов, задаваемых столбцами матрицы A.

Далее в примере демонстрируется преобразование поворота, которое приводит матрицу к верхнетреугольному виду. В данном случае необходимо «обнулить» только элемент в третьей строчке и первом столбце, это можно сделать с помощью поворота относительно оси Oy.

$$T_{13}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

Все преобразования можно увидеть на графике в виде анимации, что наглядно демонстрирует приведение матрицы к верхнетреугольному виду. На рисунке 2 показано итоговое положение векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

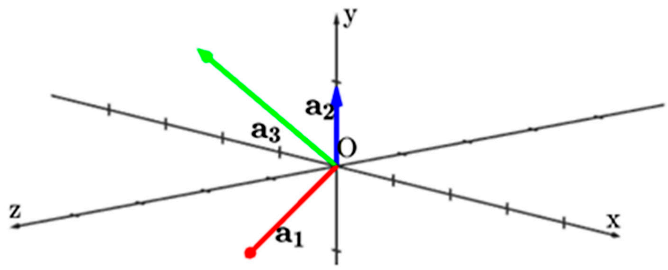

Рис. 1. Геометрическая визуализация матрицы, которую необходимо привести к верхнетреугольному виду

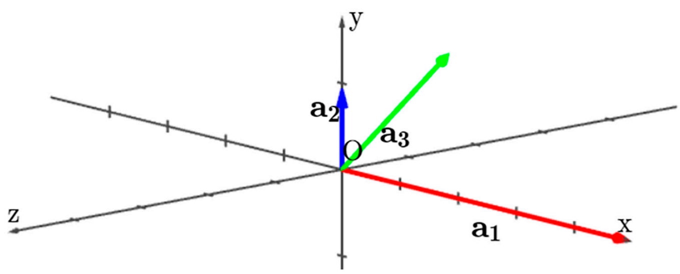

Рис. 2. Геометрическая визуализация матрицы, приведённой к верхнетреугольному виду

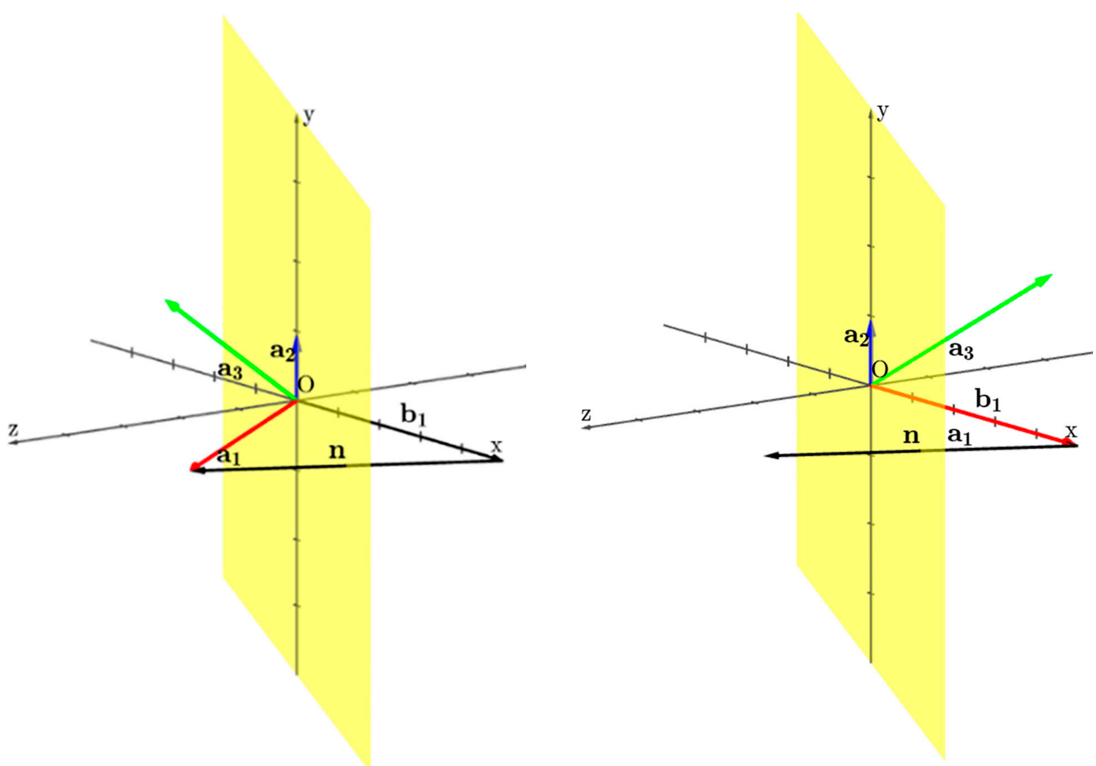

Рис. 3. Отражение векторов a_1, a_2, a_3

Для метода отражений также была создана визуализация, которая позволяет проследить геометрический смысл преобразования, приводящего матрицу к верхнетреугольному виду. На рисунке 3 слева можно видеть исходное положение векторов, координаты которых задаются той же матрицей A, и плоскость, относительно которой нужно отразить вектор $a_1 = (3\ 0\ 4)^T$, чтобы у него обнулились все координаты, кроме первой.

Матрица такого преобразования вычисляется по формуле

$$H = E - 2\frac{nn^T}{|n|^2},$$

где E – единичная матрица, $\vec{n}$ – нормаль к плоскости, относительно которой отражаются векторы. Тогда для матрицы A такое преобразование будет описываться матрицей

$$HA = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = R$$

Итоговый вид QR-разложения можно найти, если умножить обе части равенства на матрицу, обратную к H, причём, так как она является ортогональной, то $H^{-1} = H^T$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В рамках разработанного учебного модуля также была реализована уникальная возможность интерактивного исследования процесса QR-разложения. Студенты получают доступ к интуитивно понятному интерфейсу, где могут ввести произвольную матрицу и наблюдать весь процесс её преобразования в режиме реального времени. Данный подход позволяет преодолеть традиционные трудности в понимании QR-разложения. Студенты не просто запоминают алгоритмические шаги, а формируют глубокое интуитивное понимание геометрической сути процесса [10]. Наблюдая, как произвольно заданная матрица шаг за шагом преобразуется в верхнетреугольную, учащиеся устанавливают прочную связь между алгебраическими операциями и их геометрическим смыслом.

Автоматическая генерация условий

При автоматической генерации заданий такого вида необходимо в первую очередь учитывать арифметическую сложность решения и постараться минимизировать вероятность арифметической ошибки [11; 12]. Этого можно добиться, если сформулировать условия таким образом, чтобы в ходе решения не появлялись сложные, несократимые дроби, а также выражения с корнем. Для задачи нахождения QR-разложения исходную матрицу A можно сгенерировать, если подобрать произвольную ортогональную матрицу Q и верхнетреугольную матрицу R и перемножить их. Но элементы ортогональной матрицы чаще всего бывают корнями, и, как следствие, процесс нахождения такой матрицы будет подвержен большому количеству ошибок.

Авторами был предложен и реализован следующий алгоритм, который позволяет генерировать ортогональные матрицы с «удобными» коэффициентами для нахождения QR-разложения с помощью ортогонализации Грама – Шмидта.

1. Подбираются такие целые значения m и n, которые образуют пифагорову тройку, то есть сумма квадратов этих чисел равняется квадрату третьего целого числа. Это поможет избежать корней при нормировке векторов.

2. Тогда ортогональную матрицу Q можно в общем виде записать таким образом:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} & \frac{-2mn}{m^2 + n^2} & 0 \\ \frac{2mn}{m^2 + n^2} & \frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Далее для разнообразия матриц Q можно переставить столбцы или строки матрицы местами, транспонировать матрицу и умножить на исходную. По свойствам также будет получаться ортогональная матрица.

4. Матрица R подбирается как матрица со всеми диагональными элементами, равными 1 и со случайными значениями a, b, c, таким образом, чтобы значения матрицы A были целыми числами.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ниже приведены результаты работы алгоритма.

Результаты работа алгоритма по генерации условий

Условие задачи. Матрица A	Ответ. Матрица Q	Ответ. Матрица R
$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$Q=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3/5 & 0 & 4/5\\ -4/5 & 0 & 3/5\end{pmatrix}$	$R=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$
$A=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 3\\ -6 & 1 & -1\\ 12 & 6 & 4\end{pmatrix}$	$Q=\begin{pmatrix}-2/7 & 6/7 & 3/7\\ -3/7 & 2/7 & -6/7\\ 6/7 & 3/7 & -2/7\end{pmatrix}$	$R=\begin{pmatrix}14 & 3 & 3\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 2 & -6 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$	$Q=\begin{pmatrix}-2/3 & -1/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\end{pmatrix}$	$R=\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Разработанный алгоритм позволяет автоматически генерировать различные условия, и при этом решение задачи не сопровождается сложными арифметическими вычислениями, что позволяет студентам сосредоточиться на ходе решения задачи.

Автоматическая проверка

Одним из ключевых преимуществ современных образовательных платформ является мгновенная обратная связь [13; 14]. За этим стоит система автоматической проверки ответов, которая сравнивает решение пользователя с эталонным [15]. Подавляющее большинство автоматических проверок построено по принципу «всё или ничего». Это означает, что ответ учащегося признается либо абсолютно верным, либо полностью неверным [13; 14]. Система ищет точное совпадение с заранее заложенным правильным ответом. При таком подходе невозможно оценить частично правильное решение. Например, если студент правильно выстроил логику и совершил вычислительную ошибку в последнем действии, система не засчитает ему правильные этапы рассуждения – она увидит лишь неверный итоговый ответ и поставит «0» [14; 15].

Для решения этой проблемы при проверке задачи на нахождение QR-разложения был разработан алгоритм на базе информационно-образовательной среды Nomotex, который позволяет проверять не только итоговый ответ, но и ход решения, и оценивать задачу поэтапно. В рамках проверки знаний по данной теме студентам предлагается найти QR-разложение с помощью ортогонализации Грама – Шмидта, и в качестве ответа указать матрицы Q и R. Введённый студентом ответ проверяется по следующему алгоритму.

1. Каждый столбец матрицы Q проверяется отдельно, так как является результатом последовательной ортогонализации Грама – Шмидта. Баллы начисляются за каждый верно найденный вектор.

2. Матрица R проверяется проверкой по формуле $A = QR$, где A – это матрица, заданная в условии, а Q – матрица, введённая студентом.

Таким образом, баллы начисляются за каждый верно найденный столбец матрицы Q и за правильно посчитанную матрицу R, что позволяет начислять баллы за частично верный ответ, а также указать студенту на шаг решения, в котором, вероятно, была допущена арифметическая ошибка.

Заключение

В процессе работы была достигнута поставленная цель: разработан комплекс инструментов, позволяющий наглядно продемонстрировать геометрическую сущность методов Гивенса и Хаусхолдера для нахождения QR-разложения матриц. Это позволяет студентам не только следовать алгоритму вычислений, но и интуитивно понимать, как последовательные вращения или отражения приводят матрицу к верхнетреугольному виду. Также был реализован алгоритм автоматической генерации индивидуальных заданий по QR-разложению, успешно формирующий матрицы, решение которых не перегружено вычислительными трудностями. Студенты могут отрабатывать навыки на множестве разнообразных примеров, при этом внимание сосредоточено на сути метода, а не на ручном упрощении дробей. Была реализована система автоматизированной пошаговой проверки решений: она предоставляет мгновенную обратную связь и частично оценивает правильность каждого этапа разложения. Этот подход к контролю знаний более гибкий и справедливый по сравнению с принципом «всё или ничего», так как поощряет верные действия даже при наличии отдельных ошибок.

Внедрение разработанных средств в учебный процесс показало, что они повышают наглядность и интерактивность изучения линейной алгебры. Преподаватели отмечают сокращение временных затрат на проверку типовых задач благодаря автоматической оценке, а у студентов наблюдается рост интереса к теме за счёт игровой формы представления алгоритмов. Подход, описанный в статье, может быть распространён и на другие разделы высшей математики. В дальнейшем планируется накопление статистики об успеваемости студентов и сравнительный анализ с традиционными методами обучения, что позволит количественно оценить достигнутый эффект. Авторы полагают, что сочетание интерактивной визуализации и автоматизации оценки является перспективным направлением развития электронных курсов по математике.

Список литературы

1. Sokolovskiy A.V., Veisov E.A., Tyapkin V.N., Dmitriev D.D. Hardware Architectures of the QR-Decomposition Based on a Givens Rotation Technique // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. 2019. Vol. 12. № 5. P. 606-613. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-606-613. EDN: OABBXE.

2. Цыганова Ю.В., Куликова М.В. О современных ортогонализованных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2018. Т. 11. № 4. С. 5-30. DOI: 10.14529/mmp180401. EDN: YOTRJJ.

3. Пчельник В.К. К вопросу реализации алгоритма QR-разложения матрицы на основе преобразований Хаусхолдера в пакете MS EXCEL // Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации. 2020. № 8. С. 337-344. EDN: PDAXII.

4. Анисова Т.Л. Формирование педагогических компетенций в процессе обучения бакалавров и магистров по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки» // Современные проблемы науки и образования. 2022. № 6-1. URL: https://science-education.ru/article/view?id=32374 (дата обращения: 15.10.2025). DOI: 10.17513/spno.32374. EDN: AHSIZI.

5. Анисова Т.Л., Смехнова А.А. Математическая подготовка инженеров в цифровой образовательной среде NOMOTEX (на примере курса «Дифференциальные уравнения») // Современные проблемы науки и образования. 2020. № 5. URL: https://science-education.ru/article/view?id=30168 (дата обращения: 15.10.2025). DOI: 10.17513/spno.30168. EDN: ZNBFWY.

6. Киреева Е.А., Дерябина Г.С., Иванова Т.Л., Зубарев К.М., Кузнецов Р.Б. Методика изучения систем линейных алгебраических уравнений в среде NOMOTEX // Научное обозрение. Педагогические науки. 2024. № 6. С. 11-16. DOI: 10.17513/srps.2552. EDN: NZBNGJ.

7. Димитриенко Ю.И., Милехина Е.Н., Зубарев К.М., Васильев Д.Д. Автоматическая генерации задач по курсу «Аналитическая геометрия» в ИОС NOMOTEX // Дневник науки. 2023. № 12 (84). URL: https://dnevniknauki.ru/images/publications/2023/12/pedagogics/Dimitrienko_Milekhina_Zubarev_Vasilev.pdf (дата обращения: 15.10.2025). DOI: 10.51691/2541-8327_2023_12_37. EDN: KIZKIH.

8. Гилев П.А., Казанков В.К., Табиева А.В. Автоматическая генерация и проверка задач по дисциплинам математического цикла в высшей школе // Современное педагогическое образование. 2022. №. 11. С. 142-147.

9. Кручинин В.В., Кузовкин В.В. Обзор существующих методов автоматической генерации задач с условиями на естественном языке // Компьютерные инструменты в образовании. 2022. № 1. С. 85-96. DOI: 10.32603/2071-2340-2022-1-85-96. EDN: KUQLNE.

10. Анисова Т.Л., Облакова Т.В. Оценка уровней достижения математических компетенций бакалавров-инженеров // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2016. № 18. С. 136-142. EDN: WAYLJN.

11. Зорин Ю.А. Использование алгоритмов комбинаторной генерации при построении генераторов тестовых заданий // Дистанционное и виртуальное обучение. 2013. № 6 (72). С. 54-59. EDN: QAQHRN.

12. Кручинин В.В., Морозова Ю.В., Зорин Ю.А. Построение и использование генераторов тестовых заданий в системах дистанционного обучения // Открытое и дистанционное образование. 2018. № 3 (71). С. 5-11. DOI: 10.17223/16095944/71/1. EDN: PADBKU.

13. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Зубарев К.М., Алесин А.В., Иванова Т.Л. Автоматизация проверки задач с перестановками в цифровой образовательной среде Nomotex // Дневник науки. 2022. № 8 (68). URL:https://dnevniknauki.ru/images/publications/2022/8/pedagogics/Dimitrienko_Gubareva_Zubarev_Alesin_Ivanova.pdf (дата обращения: 15.10.2025). DOI: 10.51691/2541-8327_2022_8_6. EDN: ESXGEN.

14. Димитриенко Ю.И., Зубарев К.М., Алесин А.В., Милехина Е.Н., Бебенина А.А. Автоматическая проверка задач на собственные вектора в цифровой образовательной среде Nomotex // Дневник науки. 2022. № 12 (72). URL: https://dnevniknauki.ru/images/publications/2022/12/pedagogics/Dimitrienko_Zubarev_Alesin_Milekhina.pdf (дата обращения: 15.10.2025). DOI: 10.51691/2541-8327_2022_12_37. EDN: ZAEOHI.

15. Перязева Ю.В. Возможности автоматической проверки заданий в LMS Moodle // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15. № 4. С. 876-885. DOI: 10.25559/SITITO.15.201904.876-885. EDN: BECCUB.

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: The authors declare that there is no conflict of interest.