

УДК 519.876.5

**MATHCAD АДАПТАЦИЯ ГИПЕРУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ****Муслов С.А., Зайцева Н.В., Чистяков М.В., Фищенко К.А.***ФГБОУ ВО «Российский университет медицины» Министерства здравоохранения  
Российской Федерации, Москва, e-mail: muslov@mail.ru*

**Аннотация.** Данная статья предназначена специалистам, занимающимся расчетом гиперупругих моделей материалов и биоматериалов. Цель работы: систематизировать рабочие формулы  $F(\lambda)$  для расчета параметров гиперупругих моделей и представить основные фрагменты алгоритмов расчета в пакете Mathcad. Материалы и методы. Расчеты постоянных гиперупругих моделей выполнены в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0. Прогностическая близость модельных данных к экспериментальным оценивалась с помощью показателей математической статистики (среднеквадратичного отклонения, максимального абсолютного отклонения  $\Delta$ , приведенной погрешности  $\delta$ , % и коэффициента корреляции  $R$ ). Перечень моделей соответствует их «рейтингу» в обширной мировой литературе, посвященной механике больших деформаций. Всего проанализировано 9 моделей (из них: неогуковская, 4 модели Муни – Ривлина с различным числом параметров, Огдена, полиномиальная, Веронда-Вестманн и Йео). Приведен пример расчета биоматериала – ногтевой пластины человека на основе опытных литературных данных. Система Mathcad достаточно адаптирована для расчета параметров гиперупругих моделей материалов. Относительная простота и точность вычислительных процедур выгодно выделяют ее среди других математических пакетов менее доступных и требующих специальной подготовки. При этом полиномиальная модель имеет наилучшие показатели качества аппроксимации рассматриваемых экспериментальных данных, взятых для расчета.

**Ключевые слова:** гиперупругие модели, Mathcad, моделирование, вычислительная математика

**MATHCAD ADAPTATION OF HYPERELASTIC MODELS****Muslov S.A., Zaytseva N.V., Chistyakov M.V., Fischenko K.A.***Russian University of Medicine of the Ministry of Health of the Russian Federation,  
Moscow, e-mail: muslov@mail.ru*

**Annotation.** This article is intended for specialists involved in the calculation of hyperelastic models of materials and biomaterials. The purpose of the work is to systematize the working formulas  $F(\lambda)$  for calculating the parameters of hyperelastic models and present the main fragments of calculation algorithms in the Mathcad package. Materials and methods. Calculations of permanent hyperelastic models are performed in the Mathcad 15.0 computer algebra system. The predictive proximity of the model data to the experimental data was estimated using mathematical statistics (standard deviation, maximum absolute deviation  $\Delta$ , reduced error  $\delta$ , % and correlation coefficient  $R$ ). The list of models corresponds to their “rating” in the extensive world literature on the mechanics of large deformations. A total of 9 models were analyzed (among them: neo-Zhukovsky, 4 Mooney-Rivlin models with a different number of parameters, Ogden, polynomial, Veronda-Westmann and Yeo). An example of calculating a biomaterial – a human nail plate based on experimental literature data is given. Conclusion. The Mathcad system is sufficiently adapted to calculate the parameters of hyperelastic material models. The relative simplicity and accuracy of computational procedures favorably distinguish it from other mathematical packages that are less accessible and require special training. At the same time, the polynomial model has the best indicators of the quality of approximation of the considered experimental data taken for calculation.

**Keywords:** hyperelastic models, Mathcad, modeling, computational mathematics

Для гиперупругих материалов (неорганических и органических) закон Гука не выполняется [1, 2], и для описания деформационных свойств требуется применение различных нелинейных моделей, при этом выбор модели, которая была бы адекватной опытным данным, представляет актуальную задачу механики [3]. С точки зрения медицины оценка этих параметров может служить диагностическим показателем состояния биотканей, а знание характеристик их деформационных свойств может быть применено при реконструктивных вмешательствах и разработке замещающих искусственных аналогов – эндопротезов. Хорошо известна также востребованность

гиперупругих моделей деформирования при проектировании изделий технического назначения с использованием так называемых эластомерных материалов.

Целью исследования было систематизировать рабочие формулы  $F(\lambda)$  для расчета гиперупругих моделей и представить основные фрагменты алгоритмов вычислений параметров моделей в пакете Mathcad.

**Материалы и методы исследования**

Расчет параметров гиперупругих моделей [4–6] производили в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 (PTC Inc., США). Результаты расчетов верифицировались с помощью параллельных вычис-

лений в многофункциональном пакете ANSYS 2022 R2.

В качестве примера рассмотрен биоматериал – ткани ногтевой пластины человека. Исходные данные пластины были

представлены кривыми напряжение – деформация  $\sigma$ - $\varepsilon$  [7]. Для удобства размещения в тексте статьи они представлены векторами (матрицами) в транспонированном и сокращенном виде:

$$\varepsilon^T = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1.061 \cdot 10^{-3} & 0.025 & 0.044 & 0.05 & 0.054 & \dots \end{matrix}$$

$$\lambda^T = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1.001 & 1.025 & 1.044 & 1.05 & 1.054 & 1.056 & 1.058 & 1.061 & \dots \end{matrix}$$

$$\sigma^T = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1.477 \cdot 10^{-3} & 6.962 \cdot 10^{-3} & \dots \end{matrix}$$

где  $\sigma$  – инженерные (условные) напряжения,  $[\sigma] = \text{ГПа}$ .

**Результаты исследования и их обсуждение**

*Неогуковская модель*

Алгоритм расчета основан на применении функции «подгонки» *linfit* – функции аппроксимации по методу наименьших квадратов (она возвращает вектор с параметрами, которые используются для создания линейной комбинации функций):

$$F(\lambda) := 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$K := \text{linfit}(\lambda, \sigma, F) \quad \sigma_{NH}(t) := F(t) \cdot K$$

$$K = 0.066$$

где  $K$  – это материальная константа  $\mu$  неогуксовской модели (ГПа).

*Модель Муни – Ривлина (2-параметрическая)*

$$F(\lambda) := \begin{pmatrix} 2 \cdot \lambda - \frac{2}{\lambda^2} \\ 2 - \frac{2}{\lambda^3} \end{pmatrix}$$

$$K := \text{linfit}(\lambda, \sigma, F)$$

$$\sigma_{MR}(t) := F(t) \cdot K$$

$$K = \begin{pmatrix} -0.144 \\ 0.262 \end{pmatrix}$$

где строки в столбце (компоненты вектора) – постоянные модели  $C_{10}$  и  $C_{01}$  (ГПа).

*Модель Муни – Ривлина (3-параметрическая)*

$$F(\lambda) := \begin{pmatrix} 2 \cdot \lambda - \frac{2}{\lambda^2} \\ 2 - \frac{2}{\lambda^3} \\ 6 \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^4} \right) \end{pmatrix}$$

$$K3 := \text{linfit}(\lambda, \sigma, F)$$

$$\sigma_{MR3}(t) := F(t) \cdot K3$$

$$K3 = \begin{pmatrix} 0.043 \\ 0.059 \\ -0.085 \end{pmatrix}$$

где строки в столбце (компоненты вектора) – постоянные  $C_{10}$ ,  $C_{01}$  и  $C_{11}$ .

Модель Муни – Ривлина  
(5-параметрическая)

$$F(\lambda) := \begin{bmatrix} 2 \cdot \lambda - \frac{2}{\lambda^2} \\ 2 - \frac{2}{\lambda^3} \\ 6 \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^4} \right) \\ 4\lambda \cdot \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \\ 4 \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \end{bmatrix}$$

$K5 := \text{linfit}(\lambda, \sigma, F)$   
 $\sigma_{MR5}(t) := F(t) \cdot K5$

$$K5 = \begin{pmatrix} 8.375 \\ -8.572 \\ 168.948 \\ -62.812 \\ -119.018 \end{pmatrix}$$

где строки в столбце (компоненты вектора) – постоянные  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$  и  $C_{02}$ .

Модель Йео

$$F(\lambda) := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \\ 3 \cdot \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \end{bmatrix} \cdot \left[ 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]$$

$K := \text{linfit}(\lambda, \sigma, F)$   
 $\sigma_{Йео}(t) := F(t) \cdot K$

$$K = \begin{pmatrix} 0.104 \\ -0.165 \\ 0.169 \end{pmatrix}$$

где строки в столбце (компоненты вектора) – постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ .

Модель Муни – Ривлина  
(9-параметрическая)

Самая многочисленная по числу параметров модель Муни – Ривлина.

$$F(\lambda) := \begin{bmatrix} 2 \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \\ 6 \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^4} \right) \\ 4\lambda \cdot \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \\ 4 \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \\ 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left( 2\lambda^3 - 4\lambda + \frac{1}{\lambda^2} + 1 \right) \\ 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left( 4\lambda^2 - \frac{5}{\lambda} - 3\lambda - 6 \right) \\ 6 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ 6 \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \end{bmatrix}$$

$K9 := \text{linfit}(\lambda, \sigma, F)$

$\sigma_{MR9}(t) := F(t) \cdot K9$

$$K9 = \begin{pmatrix} -58.517 \\ 59.096 \\ -1.257 \times 10^8 \\ 3.928 \times 10^7 \\ 8.643 \times 10^7 \\ -1.98 \times 10^7 \\ -3.089 \times 10^6 \\ 7.436 \times 10^5 \\ 1.21 \times 10^6 \end{pmatrix} +$$

где строки в столбце (компоненты вектора) – постоянные  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{30}$  и  $C_{03}$ .

Отметим, что 9-параметрическая модель рекомендована к применению для деформационных кривых, содержащих две и более точек перегиба.

Модель Огдена (1-го порядка)

Полиномиальная модель (2-го порядка)

$$\sigma_{\text{теор}}(\lambda) = \mu \cdot \left( \lambda^\alpha - \lambda \frac{-\alpha}{2} \right)$$

Задаем вспомогательную матрикс-функцию:

$$F_0(z, u) := \begin{bmatrix} u_0 \cdot \left( z^{u_1} - z \frac{-u_1}{2} \right) \\ z^{u_1} - \frac{1}{\frac{u_1}{z^2}} \\ u_0 \cdot \left( \frac{\ln(z)}{\frac{u_1}{2 \cdot z^2}} + z^{u_1} \cdot \ln(z) \right) \end{bmatrix}$$

Определяем коэффициенты:

$$v := \begin{pmatrix} 1550 \\ 0.0002 \end{pmatrix}$$

$$k := \text{genfit}(\lambda, \sigma, v, F_0) = \begin{pmatrix} 7.522 \times 10^4 \\ 3.181 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

где строки в столбце (компоненты вектора) – постоянные  $\mu$  и  $\alpha$ .

$$F(\lambda) := \begin{bmatrix} 2 \cdot \lambda - \frac{2}{\lambda^2} \\ 2 - \frac{2}{\lambda^3} \\ 4 \cdot \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ 4 \frac{1}{\lambda} \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ 6 \left( \lambda - 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \end{bmatrix}$$

$$K := \text{linfit}(\lambda, \sigma, F)$$

$$\sigma_{\text{Polynom}}(t) := F(t) \cdot K$$

$$K = \begin{pmatrix} 8.375 \\ -8.572 \\ -62.812 \\ -119.018 \\ 168.948 \end{pmatrix}$$

где строки в столбце (компоненты вектора) – постоянные  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$  и  $C_{02}$ .

Модель Веронда-Вестманн

$$\sigma_{\text{теор}}(\lambda) = 2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \exp \left[ C_2 \cdot \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \right] \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_3 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right)$$

Задаем вспомогательную матрикс-функцию:

$$F_0(\lambda, u) := \begin{bmatrix} 2 \cdot u_0 \cdot u_1 \cdot \exp \left[ u_1 \cdot \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \right] \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2u_2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \\ 2 \cdot u_1 \cdot \exp \left[ u_1 \cdot \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \right] \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ 2 \cdot e^{u_1 \cdot \left( \frac{2}{\lambda} + \lambda^2 - 3 \right)} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot u_0 + 2 \cdot u_1 \cdot e^{u_1 \cdot \left( \frac{2}{\lambda} + \lambda^2 - 3 \right)} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot \left( \frac{2}{\lambda} + \lambda^2 - 3 \right) \cdot u_0 \\ 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \end{bmatrix}$$

Определяем коэффициенты (первое приближение):

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k0 := \text{genfit}(\lambda, \sigma, v, F_0) = \begin{pmatrix} -0.016 \\ -4.051 \\ 0.039 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{VW}(\lambda) := 2 \cdot k0_0 \cdot k0_1 \cdot \exp\left[k0_1 \cdot \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3\right)\right] \cdot \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2k0_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{pmatrix} := k0 = \begin{pmatrix} -0.016 \\ -4.051 \\ 0.039 \end{pmatrix}$$

где строки в столбце (компоненты вектора) – постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ .

Близость экспериментальных и модельных данных и прогностические качества моделей оценивали с помощью показателей математической статистики: среднеквадратичного отклонения (СКО), максимального абсолютного отклонения ( $\Delta$ ), приведенной погрешности ( $\delta$ , %) и коэффициента корреляции R:

Записываем СКО:

$$i := 1.. \text{длина}(\lambda) - 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{\text{длина}(\lambda) - 1} \cdot \sum_i (\sigma^{MR9}(\lambda_i) - \sigma_i)^2} = 2.803 \times 10^{-3}$$

Определяем максимальное абсолютное отклонение:

$$\Delta_i := (\sigma^{MR9}(\lambda_i) - \sigma_i) \quad \Delta := \max(\Delta)$$

Определяем максимальную приведенную погрешность:

$$\delta := \frac{\Delta}{\max(\sigma)} = 6.365 \cdot \%$$

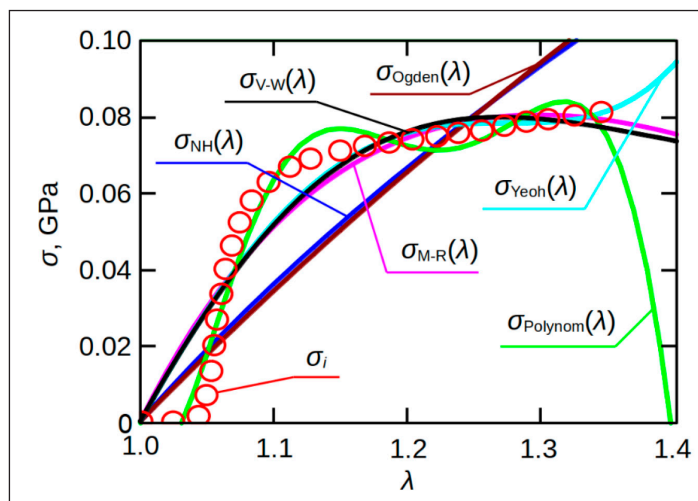
Вычисляем коэффициент корреляции:

$$A_i := \sigma_i \quad B_i := \sigma^{MR9}(\lambda_i) \quad \text{corr}(A, B) = 0.99507$$

В качестве примера расчета статистических показателей использованы данные 9-параметрической модели Муни – Ривлина ногтевой пластины человека.

Результаты вычислений параметров гиперэластичных моделей представлены на рисунке.

Из графика, представленного на рисунке, наглядно видно, что полиномиальная модель имеет наилучшие показатели качества аппроксимации рассматриваемых экспериментальных данных ногтевой пластины, взятых для расчета.



Сравнение рассмотренных прогностических гиперупругих моделей (сплошные линии): неогуксовской (NH), 2-параметрической Муни – Ривлина (M-R), Огдена 1-го порядка (Ogden), Йео 3-го порядка (Yeoh), полиномиальной 2-го порядка (Polynom) и Веронда-Вестманн (V-W) и опытных данных (точками). Ногтевая пластина человека

### Заключение

Таким образом, система Mathcad достаточно удобна и может быть рекомендована для расчета параметров гиперупругих моделей материалов. Относительная простота и точность, а также прозрачность вычислительных процедур выгодно выделяют ее среди других математических пакетов ANSYS, Comsol, MATLAB, MECHANICA и других, более рутинных, менее доступных и требующих специальной подготовки.

### Список литературы

1. Biomechanics of Living Organs. Hyperelastic Constitutive Laws for Finite Element Modeling. Yohan Payan and Jacques Ohayon (Eds.). Academic Press, 2017. 575 p.
2. Муслон С.А., Перцов С.С., Арутюнов С.Д. Физико-механические свойства биологических тканей / Под ред.

акад. РАН О.О. Янушевича. М.: МГМСУ им. А.И. Евдокимова, 2023. 456 с.

3. Шмурак М.И., Кучумов А.Г., Воронова Н.О. Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // Master's Journal. 2017. № 1. С. 230–243.

4. Stephen K. Melly, Liwu Liu, Yanju Liu, Jinsong Leng. A review on material models for isotropic hyperelasticity // Int J Mech Syst Dyn. 2021. № 1. P. 71–88.

5. Ogden R.W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, proceedings of the Royal Society of London // Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1972. Vol. 326. № 1567. P. 565–584. DOI: 10.5254/1.3542910.

6. Michael Rackl. Curve Fitting for Ogden, Yeoh and Polynomial Models. ScilabTEC 2015, 7th International Scilab Users Conference. Paris, France, 21st and 22nd May, 2015. 18 p.

7. Farran L., Ennos A.R., Starkie M., Eichhorn S.J. Tensile and shear properties of fingernails as a function of a changing humidity environment // J Biomech. 2009. № 42(9). P. 1230–1235. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2009.03.020.