

СТАТЬИ

УДК 621.372.8

**РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ТОНКОГО ЗАРЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ****Глушченко А.Г., Шатрова Е.А.***ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»,
Самара, e-mail: gag646@yandex.ru*

Рассмотрено пространственное распределение электростатического поля, создаваемого заряженным стержнем конечной длины. Системы токопроводящих стержней широко используются для моделирования метаматериалов различного диапазона частот. Основное внимание при этом уделяется линейным и плоским периодическим решеткам токопроводящих стержней, формирующих метаструктуры микроволнового и инфракрасного диапазонов с параметрами, аналогичными параметрам естественных кристаллических структур оптического диапазона длин волн. Расчет этих структур проводится преимущественно численными методами. В настоящей работе получено аналитическое решение задачи расчета структуры электростатического поля, формируемого одиночным прямолинейным заряженным стержнем произвольной конечной длины. Получены аналитические соотношения для расчета компонент напряженности электростатического поля и потенциала этого поля. Рассмотрено изменение структуры электростатического поля в зависимости от распределения линейной плотности заряда. Представлены картины распределения интенсивности излучения в различных точках структуры. Установлено, что в частных случаях бесконечно длинного проводника и на больших расстояниях полученные соотношения переходят в известные соотношения для расчета электростатического поля. Полученные соотношения для электростатического поля стержней совместно с соотношениями для расчета электростатического поля заряженных колец позволяют разрабатывать аналитическую теорию искусственных материалов нового типа (метасред).

Ключевые слова: заряженный стержень, электростатическое поле, метасреды, неоднородная плотность**CALCULATION OF THE ELECTROSTATIC FIELD
OF A THIN CHARGED ROD****Gluschenko A.G., Shatrova E.A.***Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara,
e-mail: gag646@yandex.ru*

The spatial distribution of the electrostatic field created by a charged rod of finite length is considered. Conductive rod systems are widely used to model metamaterials across different frequency ranges. The main attention is paid to linear and flat periodic lattices of conductive rods, forming metastructures of the microwave and infrared ranges with parameters similar to those of natural crystalline structures of the optical wavelength range. The calculation of these structures is carried out mainly by numerical methods. In this work, an analytical solution is obtained for the problem of calculating the structure of the electrostatic field formed by a single rectilinear charged rod of arbitrary finite length. Analytical relations are obtained for calculating the components of the electrostatic field strength and the potential of this field. The change in the electrostatic structure depending on the distribution of linear charge density is considered. Pictures of the radiation intensity distribution at various points of the structure are presented. It has been established that in special cases of an infinitely long conductor and at large distances, the obtained relations transform into known relations for calculating the electrostatic field. The obtained relations for the electrostatic field of the rods, together with the relations for calculating the electrostatic field of charged rings, make it possible to develop an analytical theory of a new type of artificial materials (metamedia).

Keywords: charged rod, electrostatic field, metamedia, non-uniform density

Одной из основных задач электродинамики является задача расчета параметров излучающих систем различной конфигурации, решаемая ввиду сложности зачастую численными методами [1, 2]. Задача излучения точечными зарядами является базовой моделью для исследования излучающих систем различного типа [2, 3]. Решения в виде аналитических соотношений, наиболее удобных для анализа физических свойств излучающих структур, ранее были получены только для простейших конфигураций: излучение точечных источников и излучение моделей бесконечно длинных заряженных стержней при однородном распределе-

нии линейной плотности заряда по длине проводника [4, 5]. Возможность получения аналитических решений при расчете полей различных конфигураций излучателей показана в [6]. Для реальных, но более сложных конфигураций используются численные методы расчета, что существенно затрудняет анализ и исследование физических свойств этих структур и проектирование излучающих антенных систем на их основе. Вопрос о необходимости учета неоднородности распределения линейной плотности заряда для корректного расчета излучаемых полей ставился в [7]. В настоящей работе показана возможность аналитического решения зада-

чи расчета электростатического поля, создаваемого заряженным стержнем конечной длины с неоднородным распределением линейной плотности заряда по длине проводника. Получены аналитические соотношения для расчета компонент напряженности и потенциала электростатического поля заряженного стержня для некоторых функций, описывающих неоднородность распределения линейной плотности заряда по оси стержня, переходящие в пределе в известные соотношения для заряженного стержня неограниченных размеров и для точечного заряда. Рассмотрена структура поля в области заряженного стержня и ее зависимость от распределения линейной плотности заряда на стержне.

Целью работы являлось аналитическое решение задачи расчета электростатического поля заряженного стержня с неоднородным распределением плотности заряда по длине стержня, получение обобщения ранее известных аналитических соотношений для расчета компонент напряженности электростатического поля для неоднородного распределения линейной плотности заряда по стержню, численное исследование структуры электростатического поля, создаваемого заряженным стержнем.

Материалы и методы исследования

Для исследования использовались уравнения классической электростатики для расчета полей стержней ограниченных в пространстве размеров. Получено графическое представление поля излучения в пространстве.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим тонкий заряженный стержень с плотностью распределения зарядов, вдоль оси стержня, описываемой в общем случае функцией $\tau(x)$ (рис. 1). Проведем расчет поля в произвольной точке А, положение которой определяется расстоянием r_0 от оси стержня и углами β_1, β_2 , под которыми видны концы стержня из точки наблюдения. Из рисунка следует, что соотношения между геометрическими параметрами имеют вид

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha}, \quad dx \cdot \cos \alpha = r \cdot d\alpha.$$

Компоненты напряженности электростатического поля, создаваемого каждым элементом $dq = \tau(x)dx$ заряженного стержня (рис. 1) под углом α , определяются соотношениями

$$dE_x = dE \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau(x)dx}{r^2} \sin \alpha,$$

$$dE_y = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau(x)dx}{r^2} \cos \alpha.$$

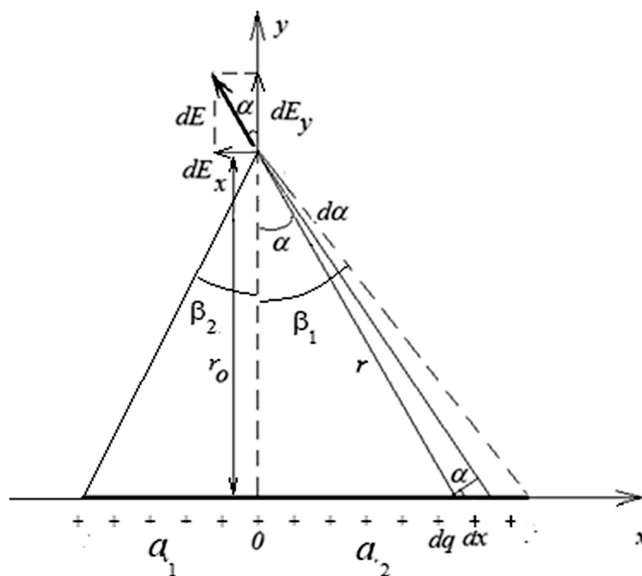


Рис. 1. К расчету электростатического поля, создаваемого заряженным стержнем, расположенным вдоль оси Ox в области $(-a_1, a_2)$

Тогда x и y компоненты поля

$$E_x = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dE_x = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dE \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau(\alpha) \sin \alpha d\alpha}{r_0},$$

$$E_y = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dE_y = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dE \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau(\alpha) \cos \alpha d\alpha}{r_0}.$$

Потенциал электростатического поля, создаваемого стержнем в той же точке:

$$\varphi = \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau(x) dx}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau(\alpha) d\alpha}{\cos \alpha}.$$

В частном случае однородного распределения линейной плотности заряда вдоль оси стержня ($\tau(x) = \text{const}$) имеем для компонент напряженности поля соотношения

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + r_0^2}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + r_0^2}} \right),$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + r_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + r_0^2}} \right),$$

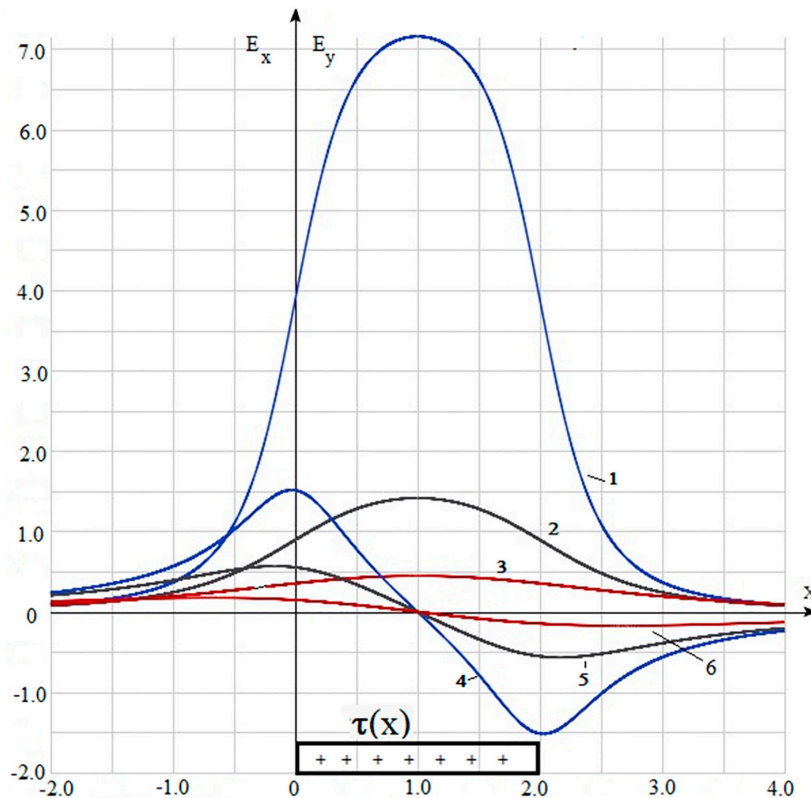


Рис. 2. Изменение нормированных на $k\tau$ ($k = 9 \cdot 10^9$) компонент напряженности электрического поля (E_x (кривые 4, 5, 6), E_y (кривые 1, 2, 3) вдоль оси заряженного стержня с линейной плотностью распределения заряда $\tau = \text{const}$, $l = 2$, $a_1 = 0$, кривые 1, 4 – $r_0 = 0,5$, кривые 2, 5 – $r_0 = 1$, кривые 3, 6 – $r_0 = 2$)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau d\alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \ln \left(\frac{\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\beta_2}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \right|}{\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\beta_1}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right|} \right) =$$

и для потенциала:

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \ln \left(\frac{\left(a_2 + r_0 + \sqrt{r_0^2 + a_2^2} \right) \cdot \left(a_1 + r_0 + \sqrt{r_0^2 + a_1^2} \right)}{\left(a_2 - r_0 - \sqrt{r_0^2 + a_2^2} \right) \cdot \left(a_1 - r_0 - \sqrt{r_0^2 + a_1^2} \right)} \right)$$

Характер изменения компонент поля вдоль осей, параллельных оси стержня вблизи стержня, показан на рис. 2.

Характер изменения поля при разном удалении от стержня сохраняется, уменьшаясь по величине.

Изменения компонент поля при удалении точки наблюдения в направлении, перпендикулярном оси стержня, у одного из концов стержня показан на рис. 3, уменьшаясь по величине.

Наблюдается рост E_y компоненты поля при приближении к центральной части стержня. В центральной части стержня по оси перпендикулярной стержню компонента электростатического поля $E_x = 0$ при этом на любом расстоянии от стержня. На больших расстояниях от стержня (при $r_0 \gg a_1, a_2$), когда заряженный стержень можно считать точечным источником, расчетное соотношение для компонент напряженности электрического поля принимает известный вид

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} (a_1 + a_2) = \frac{\tau l}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}, \quad E_x \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

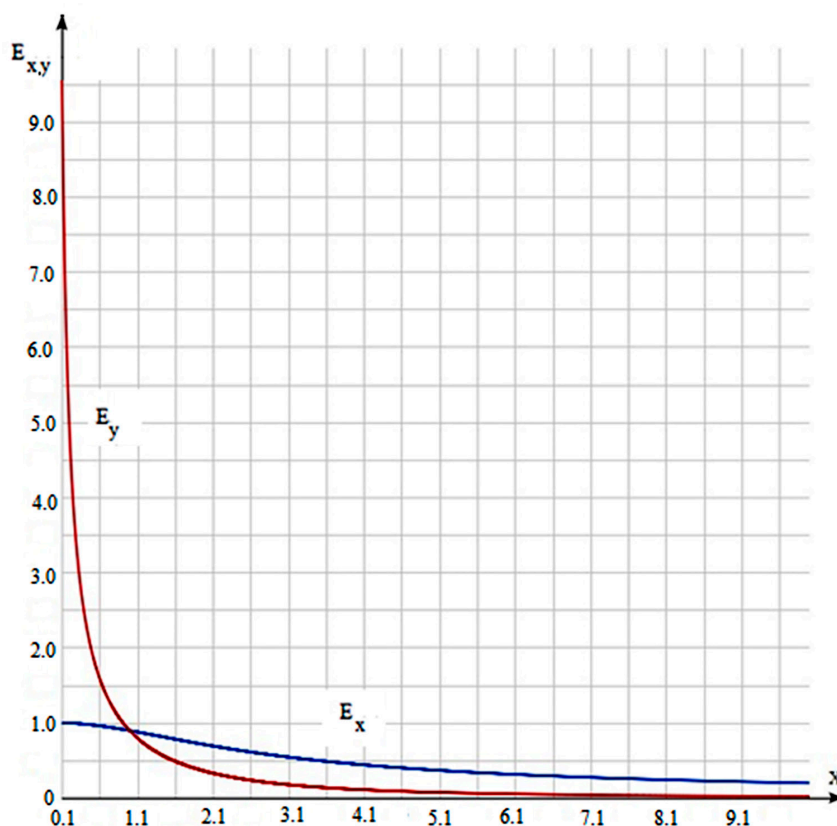


Рис. 3. Зависимость нормированных на $k\epsilon_0 r_0^2$ компонент поля от расстояния до стержня (длина стержня $l = 2$, $x = r_0/l$, $a_1 = 0$, $a_2 = l$)

В случае неоднородного распределения линейной плотности заряда вдоль оси стержня, описываемого функцией $\tau = \chi\alpha$, компоненты поля определяются соотношениями

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau(\alpha) \sin \alpha d\alpha}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\chi\alpha \sin \alpha d\alpha}{r_0} =$$

$$= \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\sin \beta_2 - \beta_2 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 - \beta_1 \cos \beta_1),$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau(\alpha) \cos \alpha d\alpha}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\chi\alpha \cos \alpha d\alpha}{r_0} =$$

$$= \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\beta_2 \sin \beta_2 + \cos \beta_2 - \beta_1 \sin \beta_1 - \cos \beta_1).$$

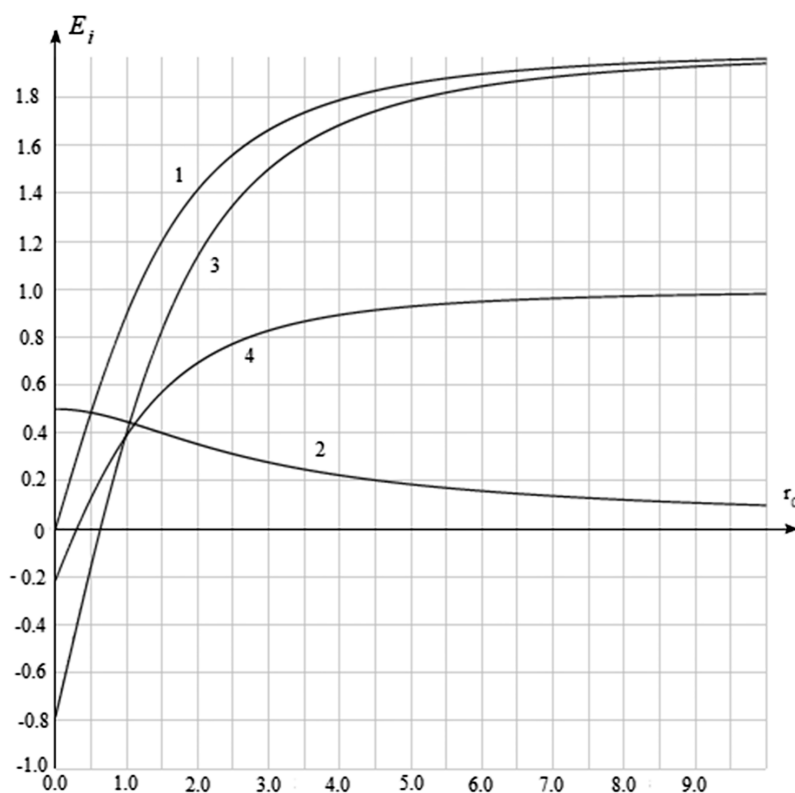


Рис. 4. Зависимость нормированных на kr (кривые 1, 2) и на $k\chi$ компонент E_x , E_y поля от расстояния до стержня при однородной (1, 2) и неоднородной (3, 4) линейной плотности распределения зарядов (здесь кривые 1, 4 – E_y – компоненты поля, кривые 2, 3 – E_x – компоненты поля)

На рис. 4 показана зависимость перпендикулярной и касательной к оси стержня компонент напряженности электростатического поля в зависимости от расстояния от оси стержня при однородном и неоднородном, описываемой линейной функцией, распределениях линейной плотности заряда. Изменение распределения линейной плотности заряда существенно влияет на структуру электрического поля – меняет не только величину,

но и направление поля вблизи заряженного стержня. При этом нормированная перпендикулярная к оси стержня компонента поля при удалении от стержня имеет одинаковый характер изменения и различается при приближении к стержню, касательная составляющая поля (рис. 1) меняет характер изменения (вместо убывания величины компоненты поля при однородном распределении заряда – величина поля возрастает).

В случае другого типа неоднородного распределения линейной плотности заряда, описываемого квадратичной функцией распределения, $\tau = \chi_2 \alpha^2$ компоненты поля определяются соотношениями

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau(\alpha) \sin \alpha d\alpha}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\chi_2 \alpha^2 \sin \alpha d\alpha}{r_0} =$$

$$= \frac{\chi_2}{4\pi\epsilon_0 r_0} [2\beta_2 \sin \beta_2 + (2 - \beta_2^2) \cos \beta_2 + 2\beta_1^2 \sin \beta_1 + (\beta_1^2 - 2) \cos \beta_1],$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\tau(\alpha) \cos \alpha d\alpha}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\chi_2 \alpha^2 \cos \alpha d\alpha}{r_0} =$$

$$= \frac{\chi_2}{4\pi\epsilon_0 r_0} [(\beta_2^2 - 2) \sin \beta_2 + 2\beta_2 \cos \beta_2 + (\beta_1^2 - 2) \sin \beta_1 + 2\beta_1 \cos \beta_1].$$

Неоднородность распределения плотности заряда приводит к существенному изменению структуры поля вблизи концов заряженного стержня, что необходимо учитывать при расчете реальных структур. Таким образом, используемая во многих работах модель однородной плотности распределения не отражает реальной ситуации. Полученные в данной работе результаты позволяют обобщить ранее известные результаты и провести их коррекцию.

Заключение

Рассмотрена зависимость структуры электростатического поля, создаваемого заряженным стержнем конечной длины в зависимости от распределения линейной плотности заряда. Получены аналитические соотношения для расчета компонент вектора напряженности электрического поля при однородном и неоднородном распределении линейной плотности заряда вдоль заряженного стержня. Полученные соотношения обобщают известные соотношения для предельного случая бесконечно длинного стержня с однородным распределением линейной плотности заряда. Распределение

заряда влияет на характер поля вблизи источника поля, что может быть использовано для исследования распределения зарядов путем измерения структуры распределения полей в области источников поля.

Список литературы

1. Britannica [Электронный ресурс]. URL: <https://www.britannica.com/science/electricity/Deriving-electric-field-from-potential> (дата обращения: 31.10.2023).
2. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. Cambridge, United Kingdom; New York, NY: Cambridge University Press, 2017. 599 p.
3. Zangwill A. Modern electrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 976 p.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. СПб.: Лань, 2021. 500 с.
5. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Издательство физико-математической литературы, 2001. 640 с.
6. Глушенко А.Г., Глушенко А.А., Глушенко В.А. Магнитное поле системы круговых токов // Научное обозрение. Технические науки. 2023. № 1. С. 21–25.
7. Иванова А.Н. Расчет электростатического поля заряженного стержня с неоднородной плотностью заряда // Материалы X Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум» [Электронный ресурс]. URL: <https://scienceforum.ru/2018/article/2018008813> (дата обращения: 31.10.2023).