УДК 004.08

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ И ЕГО РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Морозов А.В., Булекбаев Д.А., Орлова Е.В., Родионова М.С.

ФГБОУ ВПО «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», Санкт-Петербург, e-mail: vka@mil.ru

Одним из эффективных методов отыскания решений дифференциальных уравнений является операторный метод, предложенный норвежским математиком Софусом Ли более ста лет назад и существенно развитый значительно позднее Вольфгангом Грёбнером. В 1970–1980-х гг. различными модификациями операторного метода занимались А.И. Лурье, А.В. Бицадзе, Е. Майлс, Е. Вильямс, А.Н. Филатов, Б.А. Бондаренко, П.Н. Матвеев и многие другие ученые. Повышенный интерес к нему был вызван в первую очередь в связи с исследованиями задач теории вязкоупругости. А такие задачи возникали в приложениях в связи с широким применением полимерных материалов. А.Н. Филатов существенно развил операторный метод. Именно он распространил его на интегро-дифференциальные уравнения. Предложенные им операторные ряды были названы обобщенными рядами Ли. В настоящей статье рассматривается интегро-дифференциальное уравнение, описывающее продольные линейные колебания вязкоупругого стержня в среде с сопротивлением. С помощью специальных функций, названных А.Н. Филатовым квазиполиномиальными, дается представление точного решения краевой задачи. Следует отметить, что на практике такие решения требуют аппроксимации рядов соответствующими отрезками. Учитывая возможности современных компьютеров и пакетов прикладных программ в части визуализации решений, на пути дальнейшего развития и применения операторного метода в математике, а также многочисленных технических науках открывается целый ряд практически важных и интересных задач.

Ключевые слова: операторный метод, вязкоупругий стержень, точное решение линейного интегро-дифференциального уравнения

EQUATION OF VIBRATIONS OF A VISCOELASTIC ROD AND ITS SOLUTION BY THE OPERATOR METHOD

Morozov A.V., Bulekbaev D.A., Orlova E.V., Rodionova M.S.

Military Space Academy named after A.F. Mozhaisky, Saint Petersburg, e-mail: vka@mil.ru

One of the most effective methods for finding solutions to differential equations is the so-called operator method. Currently, it is somewhat forgotten and it is not given enough attention in higher education institutions. The operator method for constructing partial solutions of differential equations was proposed by the Norwegian mathematician Sophus Li more than a hundred years ago and significantly developed much later by Wolfgang Grebner. In the seventies of the twentieth century, various modifications of the operator method were carried out by A.I. Lurie, A.V. Bitsadze, E.Miles, E. Williams, A.N. Filatov, B.A. Bondarenko and many other scientists. At the same time, applications of this method were given to solving problems of solid deformed body mechanics. A.N. Filatov generalized the operator method to linear partial differential equations. He also extended it to integro-differential equations. The operator series he proposed were called generalized Lie series. In this paper, we consider an integro-differential equation describing the longitudinal linear vibrations of a viscoelastic rod in a medium with resistance. With the help of special functions, called A.N. Filatov quasipolinomial, a representation of the exact solution of the boundary value problem is given. It should be noted that in practice such solutions require approximation of the series by corresponding segments. Given the capabilities of modern computers and software packages in terms of rendering decisions on further development and application of operational method in mathematics and many technical Sciences offers a number of practically important and interesting task.

Keywords: operator method, viscoelastic rod, exact solution of a linear integro-differential equation

Операторный метод построения решений дифференциальных уравнений был открыл Софусом Ли [1]. Им были предложены принципиально новые ряды – ряды, включающие в себя операторы:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k F(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Здесь

$$D = \sum_{m=1}^{n} \Phi_m (z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_m}$$

– заданный линейный дифференциальный оператор; степень $D^k(.) = D\left(D^{k-1}(.)\right) (k \geq 1)$, $D^0(.) = D(.)$, t, z_1, z_2, …, z_n – комплексные переменные, $\Phi_m = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $F = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ – голоморфные функции комплексных переменных $z_1, z_2, \dots, z_n$. В частном случае функции $\Phi_m = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ могут быть константами, и тогда дифференциальный оператор D будет с постоянными коэффициентами.

Нетрудно видеть, что ряд Ли может быть записан в символическом виде

$$e^{tD} F(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Замечание. Если функция $F = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ – голоморфна в окрестности некоторой точки $A = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, то для достаточно малых t ($|t| < \alpha \ll 1$) будет иметь место соотношение (теорема В. Грёбнера):

$$e^{tD}F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F(e^{tD}z_1, e^{tD}z_2, \ldots, e^{tD}z_n).$$

Кроме того, если в качестве оператора D взять

$$D = \frac{d}{dz},$$

а за функцию $F(z)$ – голоморфную функцию одной скалярной переменной z, то получим

$$F(z+t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} F^{(k)}(z).$$

Откуда следует, что ряд Тейлора является частным случаем ряда Ли.

В 1970-х гг. ряды С. Ли изучались В. Грёбнером и его учениками. Были найдены также и многочисленные приложения этих рядов в теории уравнений, алгебраической геометрии, небесной механике, теоретической физике, в физике реакторов, в теории случайных величин. Операторное представление гармонических функций было построено А.В. Бицадзе, А.И. Лурье, Е. Майлсом, Е. Вильямсом, а явное представление их было дано А.Н. Филатовым и Б.А. Бондаренко [2]. А.Н. Филатову принадлежит также и развитие теории рядов Ли на решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными, а также решение ряда прикладных задач теории упругости и вязкоупругости. Предложенные А.Н. Филатовым ряды Ли (их называют обобщенными рядами Ли) имеют вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k F(t, z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Здесь

$$D = \Phi_0(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{m=1}^{n} \Phi_m(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\frac{\partial}{\partial z_m}.$$

Отличие обобщенных рядов Ли от классических рядов Ли очевидно: переменная t, по которой ведется разложение в ряд, входит в функции Φ_m. Такое обобщение позволило распространить теорию операторных рядов на широкий класс линейных уравнений с частными производными. Некоторые результаты были также получены и для нелинейных уравнений. Позднее построенная А.Н. Филатовым теория обобщенных рядов Ли была развита на случай векторной переменной $t = (t_1, t_2, \ldots, t_r)$, а также случай $t = (t_1, t_2, \ldots, t_r, \ldots)$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$. Следующим шагом в применении операторного метода стало его распространение на интегро-дифференциальные уравнения. На этом пути были построены операторные ряды, включающие не дифференциальные операторы, а интегро-дифференциальные операторы. Кроме того, оказалось возможным развитие теории обобщенных рядов Ли и на вектор-операторы, как дифференциальные, так и интегро-дифференциальные [2, 3]. Заметим также, что квазиполиномиальные функции можно строить не только на дифференциальных или интегро-дифференциальных операторах, но и других типах операторов. Главное, чтобы для них можно было бы ввести классическое понятие степени.

В настоящей статье рассматривается интегро-дифференциальное уравнение, описывающее продольные линейные колебания вязкоупругого стержня в среде с сопротивлением. С помощью специальных функций, названных А.Н. Филатовым квазиполиномиальными, дается представление точного решения краевой задачи. При написании статьи мы опирались на работы [3–5], а также на классические работы по теории упругости [6–8].

Решение уравнения продольных колебаний прямолинейного вязкоупругого стержня

Рассмотрим тонкий, прямолинейный, однородный вязкоупругий стержень. Введем систему координат $0x$, жестко связанную со стержнем. Стержень предполагаем находящимся в сопротивляющейся среде. Пусть момент времени, соответствующий началу переходного процесса (движению стержня), $t_0 = 0$. Будем предполагать, что до начала движения скорости всех сечений стержня одинаковы [4]. Обозначим $u(t, x)$ – перемещение сечения стержня с координатой x в момент времени t. Предположим, что связь между напряжением σ_x и деформацией ε_x в стержне задана следующим линейным законом:

$$\sigma_x(t) = E\left[\varepsilon_x(t) - \varepsilon\int_0^t R(t-\tau)\varepsilon_x(\tau)d\tau\right],$$

где E – модуль Юнга;
$R(t-\tau)$ – функция релаксации;
ε – малый параметр.

Рассмотрим случай линейной зависимости силы сопротивления от скорости движения. Тогда движение стержня в системе координат $0x$ будет описываться интегро-дифференциальным уравнением вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-$$

$$-\varepsilon\int_0^t R(t-\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau,x)\,d\tau+c\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (1)$$

где ρ – плотность стержня;
c – константа, отражающая сопротивление, пропорциональное первой степени скорости деформации стержня.

Замечание. Чтобы избежать дальнейших оговорок, будем считать, что уравнение (1) записано в безразмерных переменных.

Для уравнения (1) поставим краевое условие

$$u(t,0)=\varphi(t), \qquad (2)$$

где $\varphi(t)$ – заданная функция времени t.

Зададим начальные условия

$$\left.\begin{aligned} &u(0,x)=q_0(x),\\ &\frac{\partial u}{\partial x}(0,x)=q_1(x).\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Предположим, что функция $\varphi(t)$ представима равномерно сходящимся рядом

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{t^k}{k!},t\in\Omega=(-\alpha,\alpha)\subset R, \qquad (4)$$

где на коэффициенты ряда (4) наложены условия

$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+4}}=\frac{c}{\rho},k=0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

Обозначим

$$v(t,x)=u(t,x)-\varphi(t). \qquad (6)$$

Тогда заменой (6) приведем (1) к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\left(\frac{E}{\rho}\Gamma_t\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\frac{c}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad (7)$$

где

$$\Gamma_t=1-\varepsilon\int_0^t R(t-\tau)(.)\,d\tau.$$

Так как, в силу свойства (5), правая часть уравнения (7) тождественно равна нулю, то (7) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\left(\frac{E}{\rho}\Gamma_t\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial v}{\partial t}\right)=0. \qquad (8)$$

Для уравнения (8) краевое и начальные условия перепишутся так:

$$v(t,0)=0; \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &v(0,x)=q_0(x)-a_0=f_0(x),\\ &\frac{\partial v}{\partial t}(0,x)=q_1(x)-a_1=f_1(x).\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Введем в рассмотрение следующие вектор-операторы [3]:

$$L_t(.)=\left(\Gamma_t(.),\frac{\partial}{\partial t}(.)\right), \qquad (11)'$$

$$L_x(.)=\left(\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(.),\frac{c}{\rho}(.)\right). \qquad (11)''$$

Степени операторов L_t и L_x определим, как обычно, равенствами:

$$L_t^0(.)=(.);L_t^m(.)=L_t\left(L_t^{m-1}(.)\right),$$

$$L_x^0(.)=(.);L_x^m(.)=L_x\left(L_x^{m-1}(.)\right).$$

Уравнение (8), с учетом (11)’ и (11)», примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-L_t\cdot L_x\right)v(t,x)=0. \qquad (12)$$

Здесь $L_t \cdot L_x$ обозначает скалярное произведение.

Представим теперь функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ в виде рядов Фурье по синусам

$$f_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ns}\sin\frac{\pi n}{l}x,s=0,1. \qquad (13)$$

А тогда, нетрудно убедиться, что в силу сделанных предположений квазиполиномиальная функция

$$v(t,x)=\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=0}^{\infty}L_t^i\left(\frac{t^{2i+s}}{(2i+s)!}\right)L_x^i f_s(x), \qquad (14)$$

будет решением задачи (12), (9), (10). Для доказательства, подставим (14) в уравнение (12). Тогда получим

$$\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{\infty}L_t^i\left(\frac{t^{2i-2+s}}{(2i-2+s)!}\right)\cdot L_x^i f_s(x)-$$

$$\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=0}^{\infty}L_t^{i+1}\left(\frac{t^{2i+s}}{(2i+s)!}\right)\cdot L_x^{i+1} f_s(x)=$$

$$\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{\infty}L_t^i\left(\frac{t^{2i-2+s}}{(2i-2+s)!}\right)\cdot L_x^i f_s(x)-$$

$$\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{\infty}L_t^i\left(\frac{t^{2i-2+s}}{(2i-2+s)!}\right)\cdot L_x^i f_s(x)=0\,.$$

Отсюда следует, что функция (14) есть решение уравнения (12). А так как, в силу (13), выполняется равенство

$$L_x^i f_s(x)\Big|_{x=0}=0, i=0,1,2,\ldots,$$

то функция (14) удовлетворяет и граничному условию (9). Кроме того, из (14) вытекает

$$v(t,x)=f_0(x)+tf_1(t)+$$
$$+\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{\infty}L_t^i\left(\frac{t^{2i+s}}{(2i+s)!}\right)\cdot L_x^i f_s(x),$$

откуда

$$v(0,x)=f_0(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0,x)=f_1(x).$$

Следовательно, решение (14) удовлетворяет и начальным условиям (10). Таким образом, получено точное решение нашей задачи.

Для получения приближенного решения можно ограничиться конечным отрезком ряда (14). При этом встает задача аналитической или численной оценки полученного решения [9, 10]. Но это является предметом другого исследования.

Замечание. Изложенный выше операторный метод можно продемонстрировать и для дифференциального уравнения вынужденных колебаний стержня

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu EI\frac{\partial^5 u}{\partial t\,\partial x^4}=Q(t,x)\,. \quad (15)$$

Здесь EI – жесткость стержня, F – площадь поперечного сечения, ρ – масса единицы объема, μ – коэффициент затухания, t – время, $Q(t, x)$ – внешняя нагрузка.

Действительно, представим (15) в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+L_t L_x\right)u(t,x)=\frac{1}{\rho F}Q(t,x), \quad (16)$$

где

$$L_t=\left(\frac{\mu EI}{\rho F}\frac{\partial}{\partial t},\frac{EI}{\rho F}\right),\ L_x=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4},\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right).$$

Далее предположим, что $\frac{1}{\rho F}Q(t,x)=$ $=g(x)\sin t$, где функция $g(x)$ имеет: 1) конечный полилинейный порядок q относительно оператора L_x; 2) $L_x^i\,g(x)\Big|_{\substack{x=0\\x=l}}=0,\ i=0,1,\ldots,q-1$.

Для уравнения (16) поставим начальные и граничные условия

$$u(0,x)=g_0(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u\Big|_{t=0}=g_1(x), \quad (17)$$

$$u(t,0)=u(t,l)=0. \quad (18)$$

Относительно функций $g_0(x)$ и $g_1(x)$ будем предполагать, что они обладают свойствами 1) и 2). Тогда, как нетрудно проверить, функция

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i L_t^i\left(\frac{t^{2i+2+k}}{(2i+2+k)!}\right)\cdot L_{xy}^i g(x)+$$

$$+\sum_{v=0}^{1}a_k\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i L_t^i\left(\frac{t^{2i+k}}{(2i+k)!}\right)\cdot L_x^i g_v(x),$$

где a_k – коэффициенты в разложении функции sin t в соответствующий ряд, будет решением задачи (16), (17), (18). В частности, если взять $g(x)=\frac{x(x-l)}{\rho F}$, $g_0(x)=c_0x^2(x-l)$, $g_1(x)=c_1x(x^2-l^2)$, c_0, c_1 – постоянные, то решением будет функция

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{t^{2+k}}{(2+k)!}\frac{x(x-l)}{\rho F}+$$
$$+c_0x^2(x-l)+t\,c_1x(x^2-l^2).$$

Заключение

Многие современные методы математической физики, например метод Треффца, Бубнова – Галеркина, коллокаций, наименьших квадратов, ортогональных проекций и другие, требуют в своем применении знания базисных координатных решений. Эти базисные системы функции конструируются как точные решения однородной задачи. В связи с этим определенный интерес представляют методы построения этих точных решений. Одним из эффективных методов построения точных решений уравнений с частными производными, а также интегро-дифференциальных уравнений является операторный метод, развитый А.Н. Филатовым, история развития которого связана с С. Ли и уходит истоками в конец XIX в. Выше мы применили метод А.Н. Филатова для задачи о продольных колебаниях вязкоупругого стержня. Полученное решение является точным, но при сделанном предположении о свойстве функции $\varphi(t)$. Дальнейшее исследование аналитических свойств полученного решения можно провести с использованием каких-либо компьютерных математических пакетов с целью придания наглядности (визуализации) полученного решения и проведения качественного анализа в зависимости от параметров модели. Перспективным в этом направлении считаем использование систем символьных вычислений Maple, Mathematica, MatLab и др.

Список литературы

1. Полищук Е.М. Софус Ли. М.: URSS, 2017. 216 с.

2. Бондаренко Б.А., Филатов А.Н. Квазиполиномиальные функции и их приложения к задачам теории упругости. Ташкент: Изд-во «ФАН» УзССР, 1978. 173 с.

3. Матвеев П.Н. Квазиполиномиальные функции векторного аргумента с интегральными операторами. ДАН Украинской ССР. Серия А. 1979. № 1. С. 15–17.

4. Лебедев П.А., Матвеев П.А., Морозов А.В. Уравнение движения поезда как вязкоупругой одномерной среды и его решение. М.: Труды МИИТа, 1979. Вып. 640. С. 33–37.

5. Дзанагова И.Т. Метод операторных рядов для построения экстремальных моделей редких событий // Фундаментальные исследования. 2017. № 12. С. 277–281.

6. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: URSS, 2014. 320 с.

7. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: URSS, 2018. 392 с.

8. Георгиевский Д.В. Избранные задачи механики сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.

9. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. М.: ДМК Пресс, 2012. 768 с.

10. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15. СПб.: Питер, 2011. 400 с.