

## СТАТЬЯ

УДК 621.372.8

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ  
В ЦЕНТРЕ ПЛАНАРНЫХ СПИРАЛЕЙ****Глущенко А.А., Глущенко А.Г., Глущенко Е.П.***Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,  
Самара, e-mail: gag646@yandex.ru*

Развитие технологии производства устройств телекоммуникации определило необходимость создания новой элементной базы микрочипов и устройств нанoeлектроники, позволяющих реализовать преимущества интегральной технологии. Тенденция к уменьшению геометрических размеров элементов интегральных микросхем породила задачу создания электронных элементов планарной конфигурации. В частности, уменьшению габаритов индуктивностей и емкостей, которые бы при малых размерах имели приемлемые значения электромагнитных параметров. Оценки параметров планарных элементов из-за сингулярностей в расчетных формулах широко известных моделей иногда приводят к ошибочным результатам. Это потребовало создания физико-математических моделей расчёта индукции магнитного поля в центре планарных конструкций, которые были бы ориентированы на планарную технологию. В работе на основе уравнений закона Био-Савара-Лапласа получены аналитические соотношения для расчета магнитной индукции в центре наиболее известных и применяемых на практике планарных спиралей различной конфигурации (архимедова, гиперболическая, Ферма, Галилея, логарифмическая, квадратичная, системы концентрических окружностей, многоугольников и др.). Установлено, что использование плоских спиралей позволяет получить высокие значения индукции магнитного поля, что позволяет использовать их, в частности, в качестве высокотехнологичных элементов индуктивностей в различных частотных диапазонах микро- и нанoeлектроники.

**Ключевые слова:** интегральные схемы, планарные спирали, индукция, магнитное поле

**ANALYTICAL CALCULATION OF THE MAGNETIC INDUCTION  
IN THE CENTER OF PLANAR COILS****Glushchenko A.A., Glushchenko A.G., Glushchenko E.P.***Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, e-mail: gag646@yandex.ru*

The development of the technology for the production of telecommunication devices has determined the need to create a new elemental base of microdevices and nanoelectronics devices, allowing to realize the advantages of integrated technology. The tendency to reduce the geometric dimensions of the elements of integrated circuits gave rise to the task of creating electronic elements of a planar configuration. In particular, reducing the dimensions of inductances and capacitors, which would have acceptable values of electromagnetic parameters at small sizes. Estimates of the parameters of planar elements due to singularities in the calculation formulas of widely known models sometimes lead to erroneous results. This required the creation of physical and mathematical models for calculating the magnetic field induction in the center of planar structures that would be oriented to planar technology. Based on the equations of the Bio-Savard-Laplace law, analytical relations are obtained for calculating magnetic induction at the center of the most famous and applied planar spirals of various configurations (Archimedean, hyperbolic, Fermat, Galileo, logarithmic, quadratic, systems of concentric circles, polygons, etc.). It has been established that the use of plane spirals makes it possible to obtain high values of magnetic field induction, which makes it possible to use them, in particular, as high-tech inductance elements in various frequency ranges of micro and nanoelectronics.

**Keywords:** integrated circuits, planar spiral, magnetic induction

Уменьшение геометрических размеров элементов интегральных микросхем породило фундаментальную проблему создания планарных элементов, которые бы в малых размерах имели приемлемые значения электромагнитных параметров для построения сложных функциональных блоков, работающих в микро- и наночипах различных частотных диапазонов [1; 2].

Расчет элементов на базе уравнений электро- и магнитостатики часто приводит к неустраняемым особенностям [3]. Этот недостаток теории потребовал создания новых физико-математических моделей [3; 4], которые были бы ориентированы на потребности планарной технологии.

Цель исследования: вывод аналитических соотношений для расчета магнитной индукции в центре наиболее распространенных планарных спиралей различной конфигурации используемых в микро- и нанoeлектронике (рис. 1).

**Материалы и методы исследования**

Точный аналитический расчет магнитной индукции в планарных спиральных структурах высокой симметрии. Значение индукции магнитного поля  $B$ , которое создается ограниченными планарными спиралями в центре кольца, рассчитывается на основе закона Био-Савара-Лапласа [5] (рис. 2), где  $d\mathbf{B}$  – элементарная магнитная

индукция поля, создаваемая элементом тока  $Idl$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $dl$  – элементарный вектор длины, совпадающий по направлению с током (элемент проводника);  $I$  – сила тока;  $r$  – радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке наблюдения, в которой определяется магнитная индукция (рис. 2).

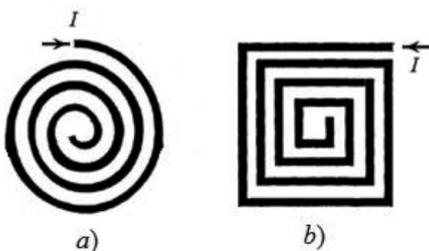


Рис. 1. Спиральные планарные структуры с плавным изменением радиуса витков

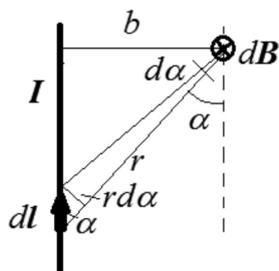


Рис. 2. Индукция магнитного поля  $dB$ , создаваемого элементом тока  $Idl$

### Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим структуры двух типов.

1. Спирали из концентрических окружностей и многоугольников (рис. 3). Многие используемые на практике (рис. 1) конфигурации могут быть представлены как совокупность  $N$  кольцевых витков с током (рис. 4). Для расчета магнитной индукции в центре многоугольной структуры для

одного витка с током, представленной на рис. 3, закон Био-Савара-Лапласа можно записать в скалярном виде [4; 5]:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \cdot N. \quad (2)$$

Здесь  $R$  – радиус вписанной в многоугольник окружности,  $N$  – число сторон многоугольника, углы

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \beta = \pi \frac{N-2}{2N}, \quad \alpha_2 = \pi \frac{N+2}{2N}.$$

Подстановка в (2) дает аналитическое соотношение:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I \cdot N}{4\pi R} \left( \cos \pi \frac{N-2}{2N} - \cos \pi \frac{N+2}{2N} \right) = \frac{\mu_0 \mu I \cdot N}{2\pi R} \sin \frac{\pi}{N},$$

которое удобно представить в виде:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R} \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{\frac{\pi}{N}}. \quad (3)$$

Здесь первый множитель – это поле, создаваемое в центре кругового тока, а второй показывает разницу полей, создаваемых круговым током и многоугольником с числом сторон  $N$ . В случае прямоугольника со сторонами  $b, d$  ( $b \neq d$ ) магнитная индукция в центре определяется соотношением:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{\pi} \left( \frac{1}{d} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2}} + \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{d}\right)^2}} \right) = \frac{\mu_0 \mu I}{\pi b d} \sqrt{b^2 + d^2}.$$

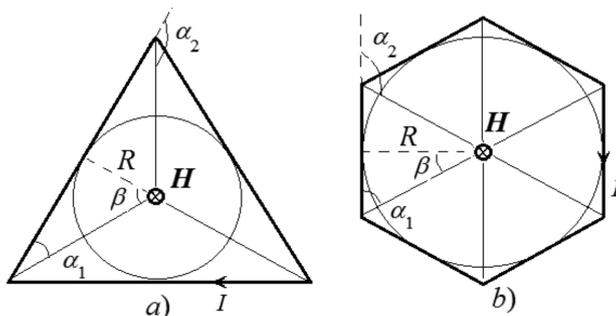


Рис. 3. Структура многоугольника с током (a – треугольник, b – шестиугольник)

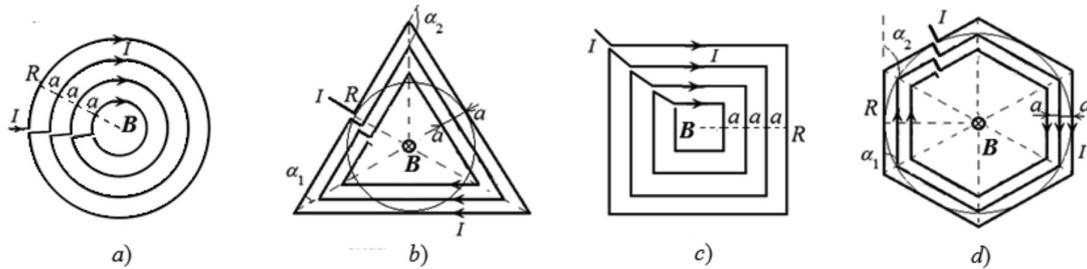


Рис. 4. Планарные спирали, сформированные круговыми витками (а) и многоугольниками (b, c, d)

На рис. 4 (b, c, d) показаны планарные многовитковые структуры (с  $N = 3, 4, 6$ ), сформированные подобными многоугольниками с меняющимися размерами сторон. В этом случае магнитная индукция для частного случая трехвитковой структуры (рис. 4, b) с числом витков  $k = 3$  определяется соотношением:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R} \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{\frac{\pi}{N}} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R-a} + \frac{1}{R-2a} \right).$$

Для структуры из  $K$  – виткового многоугольника с числом сторон  $N$  (рис. 4, b, c, d)

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{\frac{\pi}{N}} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{R-ka},$$

где  $a$  – расстояние между витками, причем ( $Ka < R$ ).

Для  $K$  – виткового прямоугольника с внешними сторонами  $b, d$  и расстоянием между витками  $a$

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{\pi} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\sqrt{(b-ka)^2 + (d-ka)^2}}{(b-ka)(d-ka)},$$

$$(Ka < b, d).$$

Для системы  $K$  – колец (рис. 4, a) магнитная индукция может быть рассчитана по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{R-ka}.$$

2. Расчёт магнитного поля в центре спирали с плавно меняющимся радиусом (рис. 1) будем проводить, используя закон Био-Савара-Лапласа в полярной системе координат:

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)}.$$

Общая формула для расчёта индукции в начале координат для любых спиралей [6; 7], описываемых функцией  $r(\varphi)$ , представленной в полярных координатах, имеет вид:

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)}.$$

Для обобщённых спиралей вида [6; 7], описываемых функцией  $r(\varphi) = b + a\varphi^{1/n}$

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi (b + a\varphi^{1/n})}.$$

В частности, для одной из наиболее часто встречающихся спиралей – спирали Архимеда ( $n = 1, r(\varphi) = a\varphi$ ) имеем:

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi a\varphi} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \ln \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Предположим, что начальное положение спирали Архимеда находится в точке  $r = r_1$  и имеет угол  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, a \neq 0$ . Это позволяет устранить особенность, возникающую в начале координат. Для гиперболической спирали ( $r(\varphi) = a\varphi$ ) имеем:

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I \varphi d\varphi}{4\pi a} = \frac{\mu_0 \mu I}{8\pi a} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2).$$

Для логарифмической спирали, описываемой функцией  $r = a^\varphi, a > 0$ .

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi a^\varphi} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^{-\varphi} d\varphi = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \frac{1}{a^\varphi \ln a} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Для спирали Ферма,  $r(\varphi) = a\sqrt{\varphi}$

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi a \sqrt{\varphi}} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} 2\sqrt{\varphi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Спираль Литуус описывается функцией  $r(\varphi) = a / \sqrt{\varphi}$ , тогда

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I \sqrt{\varphi} d\varphi}{4\pi a} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varphi} d\varphi = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \frac{2}{3} \varphi^{3/2} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Спираль Галилея описывается функцией  $r = a\varphi^2 - l, l > 0$ , тогда

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi (a\varphi^2 - l)} = \frac{\mu_0 \mu I}{8\pi a} \frac{1}{\sqrt{l}} \ln \left| \frac{\varphi_2 - \sqrt{\frac{l}{a}}}{\varphi_2 + \sqrt{\frac{l}{a}}} \cdot \frac{\varphi_1 - \sqrt{\frac{l}{a}}}{\varphi_1 + \sqrt{\frac{l}{a}}} \right|.$$

Если в спирали Галилея параметр  $l = 0$ , то мы имеем квадратичную спираль. Магнитная индукция в центре такой спирали описывается функцией:

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi r(\varphi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi a\varphi^2} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\varphi^2} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \frac{1}{\varphi} \Big|_{\varphi_2}^{\varphi_1} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \left( \frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2} \right).$$

В таблице сведены формулы для расчета магнитной индукции в центре наиболее распространенных типов спиралей.

Магнитная индукция в центре различных спиралей

| Вид спирали  | Уравнение спирали $r(\varphi)$        | Магнитная индукция $B$ в центре спирали  |
|--|---------------------------------------|--|
| Система К – концентрических колец, радиусами $R, R-a, \dots, R-ka$ | $r(\varphi) = \text{const}$           | $\frac{\mu_0 \mu I}{2} \sum_{k=0}^K \frac{1}{R-ka}$  |
| Система К – концентрических правильных многоугольников             | $r(\varphi) = \frac{R}{\cos \varphi}$ | $\frac{\mu_0 \mu I}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{\frac{\pi}{N}} \sum_{k=0}^K \frac{1}{R-ka}$ |
| Обобщённая спираль   | $b + a\varphi^{1/n}$                  | $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu I d\varphi}{4\pi (b + a\varphi^{1/n})}$        |
| Спираль Архимеда   | $a\varphi$                            | $\frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \ln \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$                                 |
| Гиперболическая спираль  | $a/\varphi$                           | $\frac{\mu_0 \mu I}{8\pi a} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2)$                                     |
| Квадратичная спираль   | $a/\varphi^2$                         | $\frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \left( \frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2} \right)$        |

| Окончание таблицы       |                                |  |
|-------------------------|--------------------------------|--|
| Вид спирали             | Уравнение спирали $r(\varphi)$ | Магнитная индукция $B$ в центре спирали  |
| Спирали Галилея         | $a\varphi^2 - l, l > 0$        | $\frac{\mu_0 \mu I}{8\pi a} \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{a}}} \ln \left  \frac{\Phi_2 - \sqrt{\frac{l}{a}} \Phi_1 - \sqrt{\frac{l}{a}}}{\Phi_2 + \sqrt{\frac{l}{a}} \Phi_1 + \sqrt{\frac{l}{a}}} \right $ |
| Логарифмическая спираль | $a^\varphi, a > 0$             | $\frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a \ln a} (a^{-\varphi_1} - a^{-\varphi_2})$   |
| Спирали Ферма           | $a\sqrt{\varphi}$              | $\frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a} (\sqrt{\varphi_2} - \sqrt{\varphi_1})$   |
| Спирали Литууса         | $a/\sqrt{\varphi}$             | $\frac{\mu_0 \mu I}{6\pi a} (\varphi_2^{3/2} - \varphi_1^{3/2})$   |

Отметим, что используемым методом аналогичные соотношения могут быть получены для других типов плоских и объемных многовитковых спиралей на поверхности магнитодиэлектриков, в том числе с ферромагнитными или ферритовыми пленками с высокой магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$  [8; 9].

#### Заключение

Получены аналитические решения задачи расчета индукции магнитного поля в центре спиралей наиболее распространенных конфигураций, на основе которых возможно создание планарных элементов микро- и наноустройств. Увеличение числа витков в спирали по сравнению с одиночным витком тока позволяет увеличить индукцию магнитного поля в центре спиралей, что позволяет создать на их основе индуктивности микро- и нанотехники. Дополнительное нанесение токопроводящих спиралей на поверхности магнитодиэлектриков с ферромагнитными или ферритовыми пленками с высокой магнитной проницаемостью позволяет существенно увеличить магнитную индукцию в центре спиралей и создавать на их основе плоские элементы с высокой индуктивностью.

#### Список литературы

1. Shatz L.F., Christensen C.W. Numerical Inductance Calculations Based on First Principles. PLoS ONE. 2014. V. 9 (11). P. e111643. DOI: 10.1371/journal.pone.0111643.
2. Гормаков А.Н., Ульянов И.А. Расчет и моделирование магнитных полей, создаваемых системой «кольца Гельмгольца – соленоид» // Фундаментальные исследования. 2015. № 3. С. 40–45.
3. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Манжула В.Г. О расчёте коэффициента увеличения планарной индуктивности спирального типа // Фундаментальные исследования. 2013. № 11–6. С. 1150–1153.
4. Glushchenko A.A., Glushchenko A.G., Glushchenko E.P. Analytical solution of the problem of calculating a magnetic field in the center of a correct polygon // Актуальные научные исследования в современном мире. IScience. 2019. В. 12(56). ч. 1. С. 6–12.
5. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Оникс 21 век, 2005. 463 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.И. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. СПб.: Лань, 2010. 608 с.
7. Блинова И.В., Попов И.Ю. Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах. СПб.: Университет ИТМО, 2017. 56 с.
8. Носов А.П., Грибов И.В., Данилов С.Е., Дубинин С.С., Марченкова Е.Б., Немытова О.В., Обухов С.И., Логинов Б.А., Беспалов В.А. Магнитные и транспортные свойства тонких пленок Ni-Mn-Ga полученных магнетронным распылением // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 2–2. С. 175–178.
9. Ranzieri P., Fabbri S., Nasi L. Epitaxial Ni–Mn–Ga/MgO(100) thin films ranging in thickness from 10 to 100 nm. Acta Materialia. 2013. V. 61. P. 263–227.