

## СТАТЬЯ

УДК 004:519.67

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КРИВИЗНУ

Нефедова В.А., Дубанов А.А.

ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова», Улан-Удэ,  
e-mail: emelyanovatorik@gmail.com, alandubanov@mail.ru

Предметом исследования в нашей статье является моделирование и расчет оптимальной траектории между преследующим и преследуемым объектом. Предлагается метод имитационного моделирования, позволяющий решать практические исследовательские задачи. В статье описаны этапы моделирования траектории движущегося тела, имеющей ограничение по кривизне, следует учесть то, что тело, движущееся по заданной траектории, начинает движение под начальным заданным углом и завершает его также под определенным углом. Наша задача имеет прикладное значение, так как рассматривается подход к организации маршрутной траектории полета летательного аппарата в вертикальной плоскости при наличии ограничений на переменные состояния. Основные результаты работы: введены математические модели движущихся тел, приведены расчеты для моделирования их траектории в каждый момент времени движения. Разработан программный код для математического моделирования траектории согласно поставленной задачи на основе аппарата аналитической геометрии, построение моделируемой траектории осуществлено в некотором классе функций. На основе этого описывается новый алгоритм планирования траектории. Данный алгоритм решения задачи является актуальным, так как результаты работы могут найти свое применение при решении прикладных задач робототехники, авиамоделирования, ракетного моделирования и др. Решение задачи в виде программного кода было произведено в среде программирования MathCAD.

**Ключевые слова:** моделируемая траектория, имитационное моделирование, траектория летательных аппаратов, ограничение по кривизне, преследующий объект, касательная к траектории

## MODELING TRAJECTORIES WITH CURVATURE RESTRICTIONS

Nefedova V.A., Dubanov A.A.

Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude,  
e-mail: emelyanovatorik@gmail.com, alandubanov@mail.ru

The subject of research in our article is the modeling and calculation of the optimal trajectory between the pursuing and the pursued object. A simulation method is proposed that allows solving practical research problems. The article describes the steps of modeling the trajectory of a moving body with a curvature restriction. It should be taken into account that a body moving along a given trajectory begins to move at an initial given angle and also completes it at a certain angle. Our task is of practical importance, since the approach to organizing the route of the aircraft in the vertical plane is considered in the presence of restrictions on state variables. The main results of the work, mathematical models of moving bodies are introduced, calculations for modeling their trajectories at each moment of time of motion are presented. The program code for mathematical modeling of the trajectory according to the task on the basis of the apparatus of analytical geometry is developed, the construction of the simulated trajectory is carried out in a certain class of functions. Based on this, a new path planning algorithm is described. This algorithm for solving the problem is relevant as the results of the work can be applied to solve applied problems of robotics, aircraft modeling, rocket modeling, etc. The solution to the problem, in the form of program code, was performed in the MathCAD programming environment.

**Keywords:** simulated trajectory, simulation, trajectory of aircraft, curvature restriction, pursuing object, tangent to the trajectory

В настоящей статье мы рассмотрим вопросы моделирования траекторий между преследующим и преследуемым объектами. На плоскости (или на поверхности) передвигаются два объекта, так как мы интерпретируем нашу задачу в задаче преследования, это участники задачи преследования. Объекты, преследующий и преследуемый, будут двигаться по определенной траектории преследования. Моделируемая траектория должна удовлетворять некоторым условиям. Одно из условий – это то, что минимальный радиус кривизны траектории не должен быть меньше некоторого порогового значения. Еще одно условие в рассматриваемой задаче – это то, что моделируемая траекто-

рия выходит под определенным углом из точки нахождения преследующего объекта и приходит в точку нахождения преследуемого объекта также под заданным углом. Будем рассматривать моделирование траектории в каждый момент времени, что предполагает точность вычислений. Теоретические положения для данной работы изложены в источниках [1, 2]. Некоторые особенности моделирования составных кривых взяты из источника [3].

Цель исследования: моделирование оптимальной траектории движения в каждый момент времени, при наличии ограничений на кривизну. Также, при заданных углах выхода преследующего объекта из точки нахождения и прихода в конечную точку пре-

следуемого объекта под заданным углом. И описание нового алгоритма планирования заданной траектории в виде программного кода для применения нашего решения на практических задачах в областях робототехники, авиамоделирования, моделирования робототехнических комплексов и других моделях, где присутствуют элементы задачи преследования.

**Материалы и методы исследования**

Рассмотрим случай на горизонтальной плоскости проекций. Пусть преследуемый объект движется по траектории  $R_r(t) = \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix}$ , а преследующий объект движется по траектории  $R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}$  (рис. 1).

В нашей задаче, которая решается в настоящей статье, моделирование траектории в каждый момент времени  $t$ . Моделируемая траектория может выходить из точки  $R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}$  под любым углом. Но в программном коде, написанном по материалам статьи, мы приняли угол между касательной к моделируемой траектории и касательной к траектории  $R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}$  равным 0, что не имеет принципиального значения в плане моделирования алгоритма. Также угол между касательной к моделируемой траектории и касательной к траектории  $R_r(t) = \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix}$  в листинге программы принят равным  $\frac{\pi}{2}$ . При этом моделируемая траектория имеет ограничения по своей кривизне. То есть радиус кривизны моделируемой кривой не может быть меньше некоторой пороговой величины. Реализация

тестовых программ будет сделана в системе компьютерной математики MathCAD. Поскольку мы имеем дело с динамическими объектами, результат будет снабжен ссылкой на анимированные изображения.

При моделировании траекторий в задачах преследования, приняты во внимание работы, посвященные динамическим играм преследования [4], групповому преследованию [5], простому преследованию [6], расчету длин траекторий в задачах преследования [7].

Также использовались результаты, достигнутые в работе по играм преследования с интегрально-геометрическими ограничениями на функции управления преследователя [8].

Как возможность применения результатов, полученных в данной статье, рассматривалась работа моделирования задачи преследования в нейронных сетях [9].

Также приняты во внимание при написании статьи методы коллективного преследования, изложенных в работах [10, 11].

**Результаты исследования и их обсуждение**

*Моделирование окружности у преследующего объекта*

Мы уже говорили, что преследующий объект движется по траектории  $R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}$  (при моделировании общего алгоритма угол между траекторией и ее касательной не имеет принципиального значения). Выполнение условия того, что угол между касательными к моделируемой траектории и к траектории  $R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}$  равен 0, и условие ограничения по кривизне, приводят к построению окружности, изображенной на рис. 2.

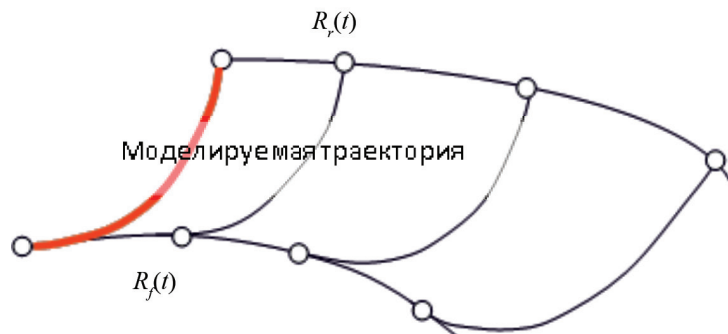


Рис. 1. Моделируемая траектория

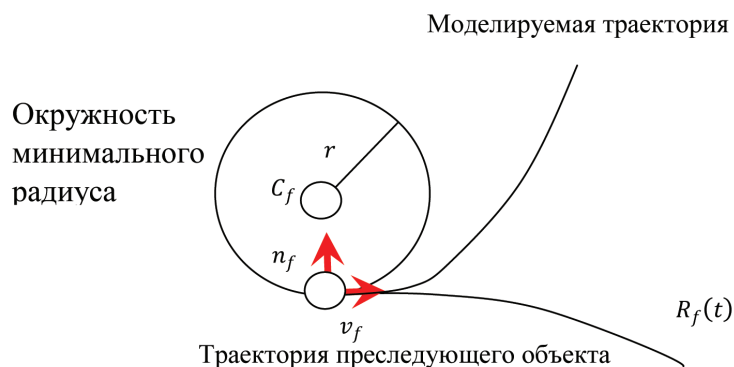


Рис. 2. Окружность к траектории преследующего объекта

На рис. 2 показано, что вдоль траектории преследующего объекта  $R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}$  формируется локальный динамический базис  $(v_f, n_f)$ , где  $v_f$  – единичный вектор, сонаправленный с вектором скорости  $V_f(t) = \frac{dR_f(t)}{dt}$  преследующего объекта. Вектор  $n_f$  – есть вектор нормали к касательной к траектории  $R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}$ .

Отсюда следует, центр моделируемой окружности  $C_f(t)$  формируется следующим образом:  $C_f(t) = R_f(t) + r \cdot n_f(t)$ , где  $r$  – это минимальный пороговый радиус траектории преследующего объекта.

Центр окружности может формироваться иначе (рис. 3):  $C'_f(t) = R_f(t) + r \cdot n'_f(t)$ . В таком случае (как на рис. 3) моделируемая траектория выходит под углом  $\alpha$  к траектории преследующего объекта  $R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix}$ .

В коде программы, написанной по материалам статьи, угол между траекториями равен 0.

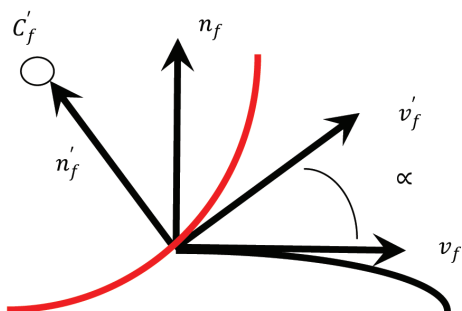


Рис. 3. Формирование окружности на траектории преследующего объекта

### Моделирование окружности у преследуемого объекта

Рассмотрим формирование окружности при входе моделируемой траектории в траекторию преследуемого объекта (рис. 4). Здесь центр окружности формируется так:

$$C_r(t) = R_r(t) + r \cdot n_r(t), \text{ где } R_r(t) = \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix}$$

– это точка траектории преследуемого объекта, а  $r$  – минимальное значение радиуса моделируемой траектории. Здесь направление вектора  $n_r(t)$  полностью определяется направлением вектора  $V_m(t)$  скорости моделируемой траектории в момент пересечения с траекторией преследуемого объекта

$R_r(t) = \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix}$ . Векторы  $n_r(t)$  и  $V_m(t)$  должны быть перпендикулярны. В листинге программы по материалам статьи используется перпендикулярность векторов  $V_m(t)$  и  $v_r$ .

### Линии сопряжения между двумя окружностями

Рассмотрим вопрос о сопряжении между двумя окружностями одного радиуса передвигающимися по траекториям

$$R_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix} \text{ и } R_r(t) = \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} \text{ (рис. 5).}$$

Исходя из данных, представленных на рис. 5, к построению общей касательной между окружностями  $(C_p, r)$  и  $(C_r, r)$ . Если мы перейдем в систему координат, образованную точкой  $C_f(t)$  и векторами (рис. 6):

$$E_1(t) = \frac{C_r(t) - C_f(t)}{|C_r(t) - C_f(t)|}, \quad E_2(t) = \begin{bmatrix} -E_{1y}(t) \\ E_{1x}(t) \end{bmatrix},$$

то задача построения линий сопряжения между двумя окружностями преобразуется к виду, изображенному на рис. 6,

где  $L = |C_r - C_f|$ . Как видно на рис. 6, существует четыре варианта линии сопряжения. Выбор варианта сопряжения оставим разработчику. Кроме того, существуют варианты расположения окружностей, которые

изображены на рис. 7. В листинге программы, написанной по материалам статьи, мы использовали один вариант взаимного расположения окружностей и построили для демонстрации четыре линии сопряжения.

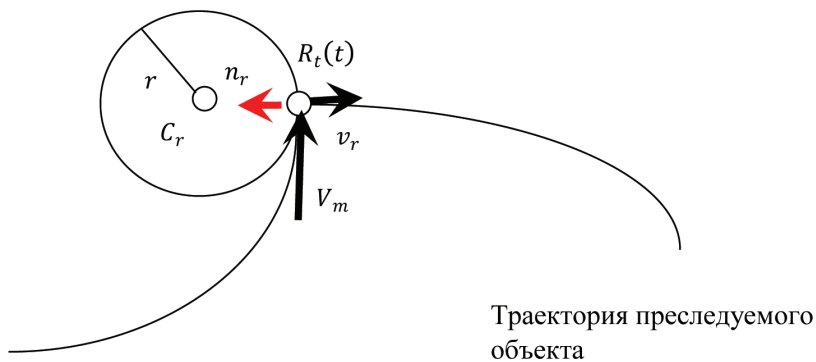


Рис. 4. Моделирование окружности у преследуемого объекта

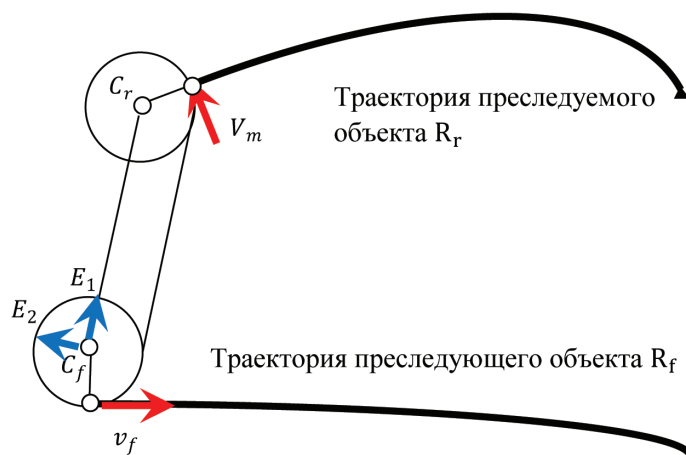


Рис. 5. Линия сопряжения в моделируемой траектории

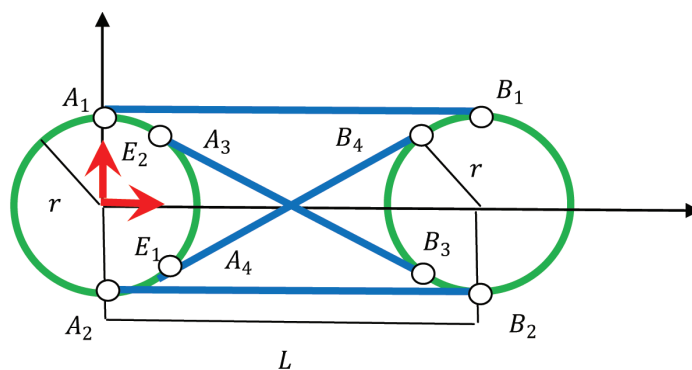


Рис. 6. Сопряжение двух окружностей

Для точек  $A_i, B_i, i=1..4$  на рис. 6 существуют решения:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{2r^2}{L} \\ \frac{r}{L} \sqrt{(L-2r) \cdot (L+2r)} \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \frac{2r^2}{L} \\ -\frac{r}{L} \sqrt{(L-2r) \cdot (L+2r)} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} L \\ r \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} L \\ -r \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} \frac{L^2 - 2r^2}{L} \\ -\frac{r}{L} \sqrt{(L-2r) \cdot (L+2r)} \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} \frac{L^2 - 2r^2}{L} \\ \frac{r}{L} \sqrt{(L-2r) \cdot (L+2r)} \end{bmatrix}.$$

Но эти решения найдены для локальной системы координат  $(C_r, E_1, E_2)$  (рис. 5), чтобы перевести точку  $P_i'$ , принадлежащую отрезку  $[A_i, B_i]$ , в мировую систему координат  $(O, H_1, H_2)$ , необходимо выполнить преобразование по формуле

$$P_i = \begin{bmatrix} P_i' \cdot h_1 \\ P_i' \cdot h_2 \end{bmatrix} + C_r,$$

где  $h_1, h_2$  – это векторы  $H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  и  $H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , разложенные по векторам базиса  $(C_r, E_1, E_2)$ , то есть путем преобразования уже в мировую систему координат  $h_1 = \begin{bmatrix} H_1 \cdot E_1 \\ H_1 \cdot E_2 \end{bmatrix}$  и  $h_2 = \begin{bmatrix} H_2 \cdot E_1 \\ H_2 \cdot E_2 \end{bmatrix}$ .

### Заключение

#### *Результаты моделирования траекторий*

В настоящей статье предлагаются модели и алгоритмы моделирования траектории путем решения задачи преследования. По

результатам, изложенным в данной статье, был написан программный код в системе компьютерной математики MathCAD. С текстом программы можно ознакомиться на следующем ресурсе [12]. Кроме того, по результатам работы программ изготовлено анимированное изображение, которое можно просмотреть в следующем источнике [13].

В процессе выполнения программы моделируемая траектория перейдет на прямую линию, если в момент отрыва от траектории преследуемого объекта совершит движение по часовой стрелке, то есть в обратном направлении. Для перехода на прямолинейный отрезок, точка после отрыва от траектории преследуемого объекта должна совершить путь равный почти полной окружности по направлению против часовой стрелки. Далее мы видим, что точка моделируемой траектории сходится с траектории преследуемого объекта по часовой стрелке и входит в траекторию преследуемого объекта под прямым углом (частный случай нашей постановки задачи, так как в начале при постановке задачи мы задали угол вхождения  $\frac{\pi}{2}$ ), но уже по направлению часовой стрелки. Точка моделируемой траектории отрывается от траектории преследуемого объекта и переходит на прямолинейный участок (траектория данной точки в этот момент времени становится прямой линией) и входит в траекторию преследуемого по часовой стрелке.

Предполагается, что данные модели и алгоритм решения поставленной задачи являются актуальными так как результаты работы могут быть использованы при решении прикладных задач робототехники, авиамоделирования, моделирования робототехнических комплексов и других моделей, где присутствуют элементы задачи преследования.

### Список литературы

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Бурдаков С.В., Сизов П.А. Алгоритмы управления движением мобильным роботом в задаче преследования // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2014. № 6 (210). С. 49–58.
3. Дубанов А.А. Конструирование базовых элементов формы и параметризация составных поверхностей // Информационные технологии. 2003. № 10. С. 42–51.
4. Ахметжанов А.Р. Динамические игры преследования на поверхностях: автореф. дис. ... канд. физ.-мат.наук. Москва, 2019. С. 28.
5. Соловьева Н.А. Групповое преследование в рекуррентных дифференциальных играх: 01.01.02-дифференци-

альные уравнения: дис. ... канд. физ.-мат.наук. Ижевск, 2016. С. 97.

6. Измestьев И.В., Ухоботов В.И. Задача преследования маломаневренных объектов с терминальным множеством в форме кольца // Итоги науки и техн. сер. Современ. Мат. и ее прил. Темат. Обз. 2018. Т. 148. С. 25–31.

7. Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В. Расчет длины траектории для задачи преследования // Вестник МГСУ. 2013. С. 20–26.

8. Саматов Б.Т. Задача преследования убегающего при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя // Автомат. и телемех. 2013. № 7. С. 17–28.

9. Романников Д.О. Пример решения минимаксной задачи преследования с использованием нейронных сетей // Сборник научных трудов НГТУ. 2018. № 2 (92). С. 108–116.

10. Пашко С.В. Эффективные стратегии преследования. Основанные на использовании функции Ляпунова // Доклады Национальной академии наук Украины. 2016. № 1. С. 26–33.

11. Пашко С.В. NP-трудность задач оптимизации коллективного преследования // Материалы 8-й Международной конференции по программированию UkrPROG'2014, Украина, Киев, 2014. С. 44–52.

12. Программный код в системе MathCAD представлен. [Электронный ресурс]. URL: <http://dubanov.exponenta.ru/books.htm> (дата обращения: 05.12.2019).

13. Анимированное изображение по результату работы программного кода. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=SNKeL3pKLwo&feature=youtu.be> (дата обращения: 05.12.2019).