

УДК 004.08

О ПРОЦЕДУРЕ ПОРОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПУСТЫХ ПОДГРАФОВ**Попов С.В.***ООО «Научно-внедренческая фирма БП+», Москва, e-mail: s-v-popov@yandex.ru*

Практическая значимость комбинаторных задач связана с развитием искусственного интеллекта, который из теоретической области переместился в востребованную практическую сферу. Большое число интеллектуальных задач достаточно естественно переформулируются на языке графов, и для их решения требуется использование теоретико-графовых методов. В частности, большое число задач по описанию разнообразных предметных областей сводится к так называемым графам ортогональности, которые очень естественно позволяют описывать различные соотношения объектов предметной области. В свою очередь для исследования графов ортогональности необходимо проводить исследование совокупностей их максимальных пустых подграфов, что требует достаточно эффективной процедуры порождения последних. При этом должны учитываться определенные условия, которым должны удовлетворять пустые подграфы. Как правило, условия суть следствия, вытекающие из содержательных ограничений на объекты предметной области. Поэтому актуальным представляется создание процедуры порождения в определенном смысле полной совокупности пустых подграфов по заданному графу ортогональности, которая позволила бы учитывать содержательные особенности предметной области. К последним следует отнести в первую очередь отношение близости объектов, которое позволяет существенно снизить перебор при порождении пустых подграфов. В статье представлен теоретический базис такой процедуры, порождающей полную совокупность максимальных пустых подграфов заданного графа ортогональности, и краткое ее описание. Процедура получает на входе матрицу смежности графа, реализована на языке C++ и показала неплохие результаты при порождении объектов предметной области, заданной графом ортогональности. Отличительной ее особенностью является возможность учитывать различные соотношения локальности объектов предметной области, что существенно ускоряет работу.

Ключевые слова: комбинаторика, графы, предметные области, пустые подграфы, векторы, порождение пустых графов**THE PROCEDURE OF GENERATING A MAXIMUM EMPTY SUB-GRAPHS****Popov S.V.***LLC Research and development firm BP+, Moscow, e-mail: s-v-popov@yandex.ru*

The practical significance of combinatorial problems is associated with the development of artificial intelligence, which has moved from the theoretical field to the demanded practical sphere. A large number of intelligent problems are naturally reformulated in the language of graphs, and their solution requires the use of graph-theoretic methods. In particular, a large number of tasks to describe a variety of subject areas is reduced to the so-called orthogonality graphs, which very naturally allow us to describe the different relations of objects of the subject area. In turn, for the study of orthogonality graphs, it is necessary to study the sets of their maximal empty subgraphs, which requires a sufficiently effective procedure for generating the latter. This should take into account certain conditions that must be satisfied by empty subgraphs. As a rule, the conditions are the consequences arising from the substantive restrictions on the objects of the subject area. Therefore, it seems relevant to create a procedure for generating in a certain sense a complete set of empty subgraphs for a given graph of orthogonality, which would allow to take into account the substantive features of the subject area. The latter should include, first and foremost, the attitude of the proximity objects, which allows to significantly reduce the bust with the product of the empty sub-graphs. The paper presents a theoretical basis for such a procedure generating a complete set of maximal empty subgraphs of a given orthogonality graph and a brief description of it. The procedure receives the adjacency matrix of the graph at the input, implemented in C++, and showed good results in the generation of objects of the domain specified by the orthogonality graph. Its distinctive feature is the ability to take into account the different ratios of locality of objects of the subject area, which significantly speeds up the work.

Keywords: combinatorics, graphs, topics, a blank sub-graphs, vectors, causing empty graphs

Для большого числа прикладных задач, сводящихся к задачам на графах, интерес представляет исследование пустых подграфов [1, 2]. Особенно это важно при принятии решений в сложных предметных областях. Поэтому эффективная процедура построения всех нетривиальных пустых подграфов, удовлетворяющих определенным требованиям, представляется актуальной. Исходя из этого, в статье введена система преобразований графов и, в конечном итоге, – предложена процедура построения всех искомых пустых подграфов. Идея процедуры построения пустых подграфов выглядит так. Мы последовательно рассматриваем подграфы исходного графа, увеличивая их сложность и определяя

для каждого пустые подграфы с искомыми свойствами. Процедура полна, поэтому по окончании работы выдаются все нетривиальные пустые подграфы.

Будем представлять пустые подграфы исходного графа, используя следующие признаки его узлов: узел *входит* в пустой подграф, узел *не входит* в пустой подграф и *неизвестно, входит ли узел* в пустой подграф. Причина возникновения последнего параметра такова. Решаемая здесь задача состоит в построении пустых подграфов, для которых выполняются определенные ограничения (например, на нижнюю оценку числа узлов). Построение осуществляется, переходя от подграфов меньшей сложности к подграфам с большей сложностью. В этом

случае возможна ситуация, когда для некоторых подграфов непонятно, принадлежит ли конкретный узел его пустому подграфу, если факт принадлежности или непринадлежности можно установить лишь в последующем. Именно в этом случае используется термин *неопределённость* относительно вхождения конкретного узла.

Цель статьи: привести теоретический базис процедуры порождения полной совокупности максимальных пустых подграфов по заданному графу ортогональности.

1. Векторное представление графов.

Построение максимальных пустых подграфов осуществляем относительно подграфов исходного графа ортогональности [3]. В частности, пусть G_1 есть подграф графа G . Тогда пустой граф $G'_1 \subseteq G_1$ называется *максимальным* в G_1 , если невозможно расширить множество его узлов за счет узлов только графа G_1 . Если $G'_1 \subseteq G_1$ есть максимальный пустой подграф, то часть узлов G_1 принадлежит G'_1 , а оставшиеся – не принадлежат. Принадлежность узлов подграфа $G \setminus G_1$ расширению пустого подграфа G'_1 характеризуется *неопределённостью*.

Пусть G'_1 есть максимальный пустой подграф графа $G_1 \subseteq G$, N_1 – есть множество узлов G'_1 , N_0 – узлы подграфа $G_1 \setminus G'_1$. Обозначим N_- – множество узлов графа G , которые не входят в G_1 . Очевидно, что *каждый узел из N_0 смежный хотя бы с одним узлом из N_1 , и каждый узел из N_1 смежный хотя бы с одним узлом из N_0 .*

Пусть G_1 и G_2 суть подграфы графа G , и $G_1 \cup G_2$ есть их объединение, включающее ребра только этих подграфов. В исходном графе G могут встречаться ребра, инцидентные одновременно узлам G_1 и G_2 , но в объединение $G_1 \cup G_2$ они не включены. Тем самым объединение $G_1 \cup G_2$ не расширяет множества ребер графов G_1 и G_2 .

Пусть $G'_1 \subseteq G_1 \subseteq G$ и $G'_2 \subseteq G_2 \subseteq G$ – максимальные пустые подграфы. Опишем максимальный в $G_1 \cup G_2$ пустой подграф, который есть подграф объединения $G'_1 \cup G'_2$. В него не включены узлы, которые не принадлежат хотя бы одному из подграфов G'_1 или G'_2 . Таким образом, результирующему пустому подграфу принадлежат лишь часть узлов объединения $G'_1 \cup G'_2$, именно те, которые не принадлежат множеству $G_1 \setminus G'_1 \cup G_2 \setminus G'_2$. Тем не менее обозначим результирующий граф, полученный из пустых подграфов G'_1 и G'_2 , как описано выше, также $G'_1 \cup G'_2$.

Распространим операцию \cup на множества пустых подграфов. Пусть G^*_1 и G^*_2 суть множества максимальных пустых подграфов. Тогда $G^*_1 \cup G^*_2 = \{G_1 \cup G_2 \mid G_1 \in G^*_1, G_2 \in G^*_2\}$.

Введем векторное обозначение подграфов. Пусть в графе G имеются N узлов, ко-

торые перенумерованы числами от 1 до N , и подграф $G_1 \subseteq G$ включает пустой подграф G' . Тогда подграф G' определяет вектор $v_{G'} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ длины N , компоненты которого суть $\langle 0, 1, _ \rangle$. Если узлы n_1, n_2, \dots, n_q принадлежат G' , то в векторе $v_{G'}$ на соответствующих местах n_1, n_2, \dots, n_q стоит 1. Эти компоненты вектора $v_{G'}$ суть *единичные*. Если узлы m_1, m_2, \dots, m_s принадлежат дополнению $G_1 \setminus G'$, то в векторе $v_{G'}$ на соответствующих местах m_1, m_2, \dots, m_s стоит 0. Эти компоненты вектора $v_{G'}$ суть *нулевые*. Иным узлам подграфа $G \setminus G_1$ в векторе $v_{G'}$ соответствуют компоненты « $_$ ». Будем называть их *незначащими*, так как мы не знаем, будут ли входить эти узлы в расширение пустого подграфа G' по мере расширения графа G_1 .

Элементы базиса $\langle 0, 1, _ \rangle$ упорядочены следующим образом $0 < _ < 1$. Компоненты 0 и 1 называются *ортогональными*. Это позволяет ввести лексикографический порядок на множестве векторов: векторы v_1 и v_2 находятся в отношении $v_1 < v_2$ тогда и только тогда, когда каждая пара (v', v'') соответствующих компонентов векторов соответственно v_1 и v_2 находятся в отношении $v' < v''$. В этом случае говорим, что вектор v_2 *поглощает* вектор v_1 .

Введем *произведение* векторов над базисом $\langle 0, 1, _ \rangle$: произведение ортогональных элементов равно 0, в остальных случаях $v_1 \times v_2 = \min(v_1, v_2)$. Затем распространим ее на векторы: произведение $v_1 \times v_2$ векторов v_1 и v_2 вычисляется покомпонентным умножением. Теперь распространим операцию \times на множества векторов. Если v^*_1 и v^*_2 суть два множества векторов, то $v^*_1 \times v^*_2 = \{v_1 \times v_2 \mid v_1 \in v^*_1, v_2 \in v^*_2\}$.

Пример 1. Пусть $v_1 = (0, 1, _, 1, _)$, $v_2 = (_, 1, 1, 0, _)$. Тогда $v_1 \times v_2 = (0, 1, 1, 0, _)$.

Установим соответствие между операцией объединения пустых подграфов и произведением векторов. Пусть пустые подграфы G'_1 и G'_2 определяют векторы соответственно v_1 и v_2 . Если узел $n \in G'_1$, (компонент $v_n = 1$), а в векторе, определяемом подграфом G'_2 , компонент $v_n \neq 0$, то узел n входит в объединение $G'_1 \cup G'_2$. И в векторе, определяемом $G'_1 \cup G'_2$, этому узлу соответствует единичный компонент. Аналогично, если узел $n \in G'_2$ и в векторе $v_{G'_1}$ компонент $v_n \neq 0$, то узел n входит в объединение $G'_1 \cup G'_2$, и в векторе, определяемом $G'_1 \cup G'_2$, этому узлу соответствует единичный компонент. Если же в векторе, определяемом подграфом G'_1 или G'_2 , узлу n соответствует нулевой компонент, то узел n не входит в объединение $G'_1 \cup G'_2$, и в векторе, определяемом объединением $G'_1 \cup G'_2$, соответствующий компонент нулевой.

Таким образом, узел входит в объединение $G'_1 \cup G'_2$ подграфов, если он входит хотя бы в один подграф, а в другом отсутствует указание, что он в него не входит. Это обозначает, что единичный компонент, определяемый объединением, появляется лишь в случае, когда в одном векторе соответствующий компонент равен 1, а в другом он не нулевой.

Пример 2. Пусть подграф G'_1 определяет вектор $(1, 1, 0, _)$, а $G'_2 - (_ , 0, _ , 1)$. Тогда объединение $G'_1 \cup G'_2$ определяет вектор $(1, 0, 0, 1)$.

Пример 3. Пусть полный подграф G с узлами 1, 2, 3, 4 является подграфом в графе с 5 узлами и не известно, какие ребра инцидентны узлу 5. Пустые подграфы подграфа G , определяют векторы: $(1, 0, 0, 0, _)$, $(0, 1, 0, 0, _)$, $(0, 0, 1, 0, _)$, $(0, 0, 0, 1, _)$. Здесь пятый компонент есть $_$, так как не известно отношение инцидентности узла 5. К этим векторам следует добавить вектор $(0, 0, 0, 0, _)$, исходя из того, что узлы 1, 2, 3, 4 могут не входить в пустой подграф, когда в него входит узел 5. Учитывая наличие последнего вектора, можно ввести обобщение: теперь векторы образуют множество $(_ , 0, 0, 0, _)$, $(0, _ , 0, 0, _)$, $(0, 0, _ , 0, _)$, $(0, 0, 0, _ , _)$.

Пример 4. Пусть G есть венчик с вершиной 1 и висячими узлами 2, 3, 4, имеется еще узел 5, для которого не известно отношение инцидентности. В этом случае пустые подграфы определяют векторы $(1, 0, 0, 0, _)$, $(0, _ , _ , _ , _)$. Во втором векторе первые три не значащих компонента обозначают, что вхождение узлов 2, 3, 4 в пустой подграф определяется не известным отношением инцидентности узла 5.

Пример 5. Пусть два подграфа определяют векторы $(0, _ , _ , 0)$ и $(_ , 0, _ , _)$. Это значит, что в первый подграф не входят узлы 1 и 4, а во второй – узел 2. Про остальные узлы расширений этих подграфов ничего сказать нельзя. Тогда $(0, _ , _ , 0) \times (_ , 0, _ , _) = (0, 0, _ , 0)$. То есть в объединение соответствующих пустых графов не входят узлы 1, 2, 4. Про узел 3 ничего сказать нельзя.

Докажем теорему.

Теорема 1. Пусть подграфы G_1, G_2, \dots, G_q графа G , покрывают все его ребра. Каждый из них определяет множество максимальных пустых подграфов, соответственно $G^*_1, G^*_2, \dots, G^*_q$. Тогда $G^*_1 \cup G^*_2 \cup \dots \cup G^*_q$ представляет собой множество пустых графов, которое включает все максимальные пустые подграфы графа G .

Доказательство проведем от противного. Допустим, имеется пустой подграф G' , не принадлежащий объединению $G^*_1 \cup G^*_2 \cup \dots \cup G^*_q$ и имеющий непустые вершинные пересечения G'_1, G'_2, \dots, G'_m соответственно с графами $G_{i1}, G_{i2}, \dots, G_{im}$ совокупности G_1, G_2, \dots, G_q . Не уменьшая общности, мож-

но считать, что G'_1, G'_2, \dots, G'_m суть максимальные пустые подграфы соответственно в $G_{i1}, G_{i2}, \dots, G_{im}$. Но тогда $G' = G'_1 \cup G'_2 \cup \dots \cup G'_m$ принадлежит объединению $G^*_1 \cup G^*_2 \cup \dots \cup G^*_q$. Противоречие. Теорема доказана.

Таким образом, любая полная совокупность подграфов, покрывающая все ребра исходного графа, позволяет получить совокупность всех максимальных пустых подграфов. И для построения совокупности максимальных пустых графов, удовлетворяющих определенным условиям, необходимо выбирать наиболее рациональное покрытие графа подграфами G_1, G_2, \dots, G_q .

2. Вывод на графах. Используя операцию \times на множестве векторов, определим понятие вывода, основываясь на бинарном правиле вывода: $v_1 \times v_2 \Rightarrow v$. Всякий вывод вектора v из множества посылок $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ можно представлять в виде однокорневого, растущего вверх бинарного дерева T , корню которого приписан вектор v . В T выше располагаются посылки, ниже заключения соответствующих правил, и листьям приписаны посылки $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$.

Введем определение. Пусть \check{v} есть вектор, определяемый некоторым подграфом. Результат v^* замены в нем всех единичных компонентов на несущественные компоненты назовем *обобщением* вектора v . Очевидно отношение $v < v^*$.

Следующий шаг состоит в том, что по выводу T вектора v строится, так называемое *обобщенное дерево* T^* вектора v^* , получающееся из T заменой всех векторов на их обобщения.

Справедливо утверждение.

Теорема 2. Обобщенное дерево T^* является выводом вектора v^* из посылок, полученных обобщением всех посылок вывода T .

Доказательство. Рассмотрим правило вывода $v_1 \times v_2 \Rightarrow v$. Пусть v^*_1 и v^*_2 есть обобщения этих векторов. Покажем, что обобщение v^* вектора v получается в результате применения правила $v^*_1 \times v^*_2 \Rightarrow v^*$. Рассмотрим покомпонентные преобразования векторов, которые могут изменяться в результате применения операции \times . Операции, не содержащие 1, не меняются. Произведения 0×1 и 1×0 заменяются соответственно на $0 \times _ = 0$ и $_ \times 0 = 0$. Во всех случаях результат равен 0. Операция 1×1 заменяется на $_ \times _ ,$ т.е. результатом является обобщение. Операции $1 \times _ = 1$ и $_ \times 1 = 1$ заменяются на $_ \times _ ,$ что также является их обобщением. Таким образом, каждое правило вывода $v_1 \times v_2 \Rightarrow v$ из T , превращается в правило вывода $v^*_1 \times v^*_2 \Rightarrow v^*$. И, следовательно, вывод T превращается в вывод T^* обобщения заключительного вектора вывода T . Теорема доказана.

3. Построение максимальных пустых подграфов. Введем такое определение. Два вектора v_1 и v_2 0-эквивалентны (обозначается $v_1 =_0 v_2$), если совпадают их 0-компоненты.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 3. Пусть T есть вывод вектора v , и T^* -обобщенный вывод вектора v^* , полученный из T . Тогда выполняются отношения: $v < v^*$ и $v =_0 v^*$.

Теорема 4. Пусть имеется совокупность $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ векторов таких, что их обобщения совпадают и равны v^* . Тогда они принадлежат одному классу эквивалентности $=_0$. Справедливо и обратное: если $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ есть множество попарно $=_0$ -эквивалентных векторов, то их обобщения совпадают.

Переход к обобщающему вектору позволяет получить более экономные выводы. Справедливо утверждение 1.

Теорема 5. Пусть T^* есть обобщенный вывод вектора v^* , и v_1 – его посылка. Тогда замена посылки v_1 на вектор v_2 , такой что $v_1 < v_2$ приводит к обобщенному выводу T_1^* вектора v_1^* такого, что выполняются отношения: $v^* < v_1^*$ и $v^* =_0 v_1^*$.

Таким образом, если в выводе вектора v^* любой его вектор v и предшествующий ему вывод заменить на вывод поглощающего его вектора v' , то заключением вывода будет вектор v^* , поглощающий первоначальный v^* .

Пример 6. Рассмотрим граф K_3 , узлы которого перенумерованы 1, 2, 3. Ребро (1, 2) определяет следующие пустые графы: (0, 1, $_$), (1, 0, $_$), (0, 0, $_$); ребро (2, 3) – пустые графы: ($_$, 0, 1), ($_$, 1, 0), (0, 0, 0); ребро 1,3 – пустые графы: (0, $_$, 1), (1, $_$, 0), (0, $_$, 0). Если перейти к обобщающим векторам и отбросить поглощаемые, то получим векторы: $\{(0, _, _), (_, 0, _)\}$, $\{(_, 0, _), (_, _, 0)\}$, $\{(0, _, _), (_, _, 0)\}$. В результате из этого множества векторов выводятся следующие векторы: ($_$, 0, 0), (0, $_$, 0), (0, 0, $_$). Выводится еще вектор (0, 0, 0), но он поглощается каждым из первых трех.

Пример 7. Полный двудольный граф (1; 3) определяет в точности два попарно несравнимых вектора ($_$, 0, 0, 0) и (0, $_$, $_$, $_$).

Введем такие определения.

Пусть все пустые подграфы графа G определяют совокупность V попарно не сравнимых обобщенных векторов. Тогда V называется базисом графа G . Пусть G_1, G_2, \dots, G_m совокупность подграфов графа G и V_1, V_2, \dots, V_m суть базисы этих подграфов. Тогда максимальная совокупность всех обобщенных попарно не сравнимых векторов в множестве $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m$ называется базисом совокупности G_1, G_2, \dots, G_m . Если G_1, G_2, \dots, G_m покрывает все ребра графа G , то он называется базисом графа G .

Пример 8. Для полного двудольного графа $(n; m)$, базис состоит из двух векторов: в первом вначале расположены m нулевых компонент, за которыми следуют n компонент $_$, у второго наоборот – вначале m компонент $_$, а затем n нулевых.

Справедлива теорема.

Теорема 6. Базис графа не зависит от выбора подграфов, покрывающих все его ребра.

Это утверждение представляет собой основу процедуры построения совокупности всех максимальных пустых подграфов по заданному графу, что имеет существенное значение при решении различных задач [4, 5]. Вкратце процедура получения пустых подграфов выглядит так. Пусть по заданному графу необходимо построить все его пустые подграфы, удовлетворяющие определенному условию. Таким условием может быть, например, нижняя граница числа узлов каждого пустого подграфа.

1. На вход поступает матрица смежности графа ортогональности. Каждая ее строка определяет вектор, которому сопоставляется пара обобщенных векторов, описывающих его пустые подграфы.

2. В цикле, до получения неподвижной точки, строим попарные произведения этих векторов, попутно выбрасывая поглощаемые столбцы. При этом используется стратегия, минимизирующая число промежуточных подграфов, делая перебор управляемым содержательными особенностями предметной области.

3. На каждом шаге построения проверяются заданные условия, которым должны удовлетворять искомые пустые подграфы. Тем самым, поиск ведется только среди подграфов, которые удовлетворяют заданным условиям.

Заключение

Приведено теоретическое обоснование процедуры построения базиса графа, определяемого максимальными пустыми подграфами. Процедура реализована на языке C++ и работает на персональных компьютерах при решении практически значимых задач. Она использует различные стратегии поиска, что позволяет снизить перебор до приемлемого.

Список литературы

1. Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: Вильямс, 2012. 528 с.
2. Füredi Zoltán. The number of maximal independent sets in connected graphs. Journal of Graph Theory. 2014. Vol. 19, no. 4. P. 463–470.
3. Попов С.В., Синтез предметных областей. Решение одного класса переборных задач. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2017. 96 с.
4. Гашков С.Б. Графы-расширители и их применения в теории кодирования. М: МЦНМО, 2009. С. 70–122
5. Зыков А.А. Основы теории графов. М: Вузовская книга, 2012. 664 с.