УДК 681.5

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ПЕРЕКРЕСТНЫХ СВЯЗЯХ

**Ильясов Б.Г., Елизарова А.В., Саитова Г.А.**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, e-mail: elizarovaanastasia@gmail.com*

Статья посвящена исследованию многосвязных систем автоматического управления (МСАУ) с запаздыванием в перекрестных связях. Рассматривается линейная многосвязная система автоматического управления, состоящая из множества идентичных (однотипных) сепаратных подсистем и связей через многомерный объект управления. Объектом исследования является многомерная САУ с запаздыванием со связями через объект управления. Для исследования линейных многосвязных систем автоматического управления используется метод декомпозиции, при котором данная система рассматривается как множество управляемых подсистем, взаимосвязанных и взаимодействующих друг с другом и образующих единое целое. Поэтому многосвязные системы автоматического управления можно описать на уровне физических подсистем и многомерных элементов связи между ними, которые рассматриваются в качестве первичных базовых элементов системы. Сложность управления многомерными объектами заключается в наличии перекрестных связей в многосвязных объектах управления и наличии запаздываний в разных частях объекта. Цель работы – на основе системного подхода описания многосвязной системы автоматического управления через характеристики связей и характеристики подсистем предлагается определение устойчивости системы с запаздыванием в перекрестных связях. Эффективность предложенного подхода подтверждена с помощью моделирования системы в пакете MATLAB SIMULINK.

**Ключевые слова: многосвязная система автоматического управления, запаздывание, метод декомпозиции, устойчивость, перекрестные связи, прямые каналы**

# THE STUDY OF THE STABILITY OF MULTI-CONNECTED CONTROL SYSTEM WITH DELAY IN THE CROSS-CONNECTIONS

**Ilyasov B.G., Elizarova A.V., Saitova G.A.**

*Ufa State Aviation Technical University, Ufa, e-mail: elizarovaanastasia@gmail.com*

The article is devoted to the study of multi-connected automatic control systems (MSAC) with cross-linking. A linear multi-connected automatic control system consisting of a set of identical (similar) separate subsystems and connections through a multidimensional control object is considered. The object of the study is a multidimensional SAC with delay with links through the control object. For the study of linear multi-connected automatic control systems, the decomposition method is used, in which the given system is considered as a set of controlled subsystems, interconnected and interacting with each other and forming a single whole. Therefore, multi-connected systems of automatic control can be described at the level of physical subsystems and multidimensional elements of communication between them, which are considered as the primary basic elements of the system. The complexity of managing multidimensional objects lies in the presence of cross-links in multi-linked control objects and the presence of delays in different parts of the object. The purpose of the work-on the basis of a systematic approach to the description of multi-connected automatic control system through the characteristics of links and characteristics of subsystems is proposed to determine the stability of the system with delay in cross-links. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by modeling the system in the MATLAB SIMULINK package.

**Keywords: multi-connected automatic control system, delay, decomposition method, stability, cross-connections, direct channel**

Многосвязная система автоматического управления (МСАУ) – система, в которой одновременно осуществляется регулирование нескольких взаимосвязанных координат. Из-за тесной взаимосвязи между процессами регулирования отдельных координат в таких системах тяжело изучать в полной мере процессы самой системы [1, 2].

Наличие запаздывания в системах автоматического управления усложняет задачу управления объектом, особенно если объект еще и многомерный. Потому что задержка в контуре управления приводит к возрастанию фазового сдвига, которая способна спровоцировать неустойчивость замкнутой системы, в том числе при наличии небольших коэффициентов усиления регулятора [3, 4].

В статье рассматривается линейная многосвязная система автоматического управления, состоящая из множества идентичных (однотипных) сепаратных подсистем и связей через многомерный объект управления. Объектом исследования является МСАУ с запаздыванием со связями через объект управления (рис. 1).

Данная МСАУ представляется с помощью следующих уравнений движения:

$$\begin{cases} X(s) = W(s)U(s), \\ U(s) = R(s)(X^0(s) - X(s), \end{cases} \qquad (1)$$

где $X^0(s)$, $X(s)$, $U(s)$ – векторы задающих, регулируемых, управляющих воздействий соответственно;

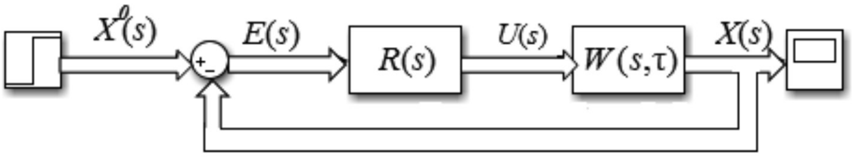


*Рис. 1. Структурная схема МСАУ: $X^0$ (s), X(s) – векторы входных и выходных величин; E(s)– единичная матрица; W(s, τ) – передаточная функция; R(s) – МПФ регулятора*

$W(s)=\left\|W_{ij}(s)\right\|_{n\times n}$ – матричная передаточная функция (МПФ) многомерного объекта по управляющим воздействиям, с запаздыванием в перекрестных связях;

$R(s)=diag\left\{R_1(s),R_2(s),...,R_n(s)\right\}$ – МПФ сепаратных регуляторов [5, 6].

Цель исследования: на основе системного подхода описания МСАУ через характеристики связей и характеристики подсистем предлагается определение устойчивости системы с запаздыванием в перекрестных связях.

Используем подход, где линейная МСАУ рассматривается как множество управляемых подсистем, взаимосвязанных и взаимодействующих друг с другом и образующих единое целое. Данный вид системы можно описать на уровне физических подсистем и многомерных элементов связи между ними, которые рассматриваются в качестве первичных базовых элементов системы [7, 8].

Рассмотрим однотипную МСАУ с запаздыванием в подсистемах. Передаточные функции объекта управления (ОУ) $W_{ij}(s)$ – однотипные, следовательно:

$$R_1W_1=R_2W_2=...=R_nW_n,$$

где $W_{ij}(s)=\dfrac{K_{ij}(s)}{T_0+1}$ – матричная передаточная функция многомерного объекта;

$R_{ii}(s)=\dfrac{K_i(T_is+1)}{s(\tau_0s+1)}$ – передаточная функция регуляторов с учётом требования астатизма первого порядка по каждому из каналов, равные между собой.

Для МСАУ, соответствующей системе уравнений (1), передаточные функции индивидуальных характеристик подсистем имеют вид [9]:

$$\Phi_{ii}(s)=\frac{R_{ii}(s)W_{ii}(s)}{1+R_{ii}(s)W_{ii}(s)}. \qquad (2)$$

Для полной МСАУ, состоящей из *n* подсистем и соответствующей системе уравнений (1), характеристика связи (ХС) в общем виде между *k* подсистемами имеет вид

$$h_k(s)=\frac{\det\left[W_{ij}(s)\gamma_{ij}\right]_{k\times k}}{\det\left[W_{ij}(s)\delta_{ij}\right]_{k\times k}},$$

где $W_{ij}(s)$ – передаточные функции МСАУ.

$$\gamma_{i_j}=\begin{cases}0,\ i=j,\\ e^{-\tau s},\ i\neq j,\end{cases}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1,\ i=j,\\ 0,\ i\neq j,\end{cases}\quad k=\overline{2,n};\ i,j=\overline{2,n}.$$

Характеристическое уравнение МСАУ в общем виде имеет вид

$$D(\Phi,h)=1+h_2^*(s)\Phi^2(s)+$$
$$+h_3^*(s)\Phi^3(s)+...+h_n^*(s)\Phi^n(s)=0, \qquad (3)$$

где $h_k^*(s)=h_k(s)e^{-\tau s}$, $k=1,\ldots,n$.

Проанализируем уравнение связей относительно переменной *x*:

$$D(s,x)=1+h_2^*(s)x^2+$$
$$+h_3^*(s)x^3+...+h_n^*(s)x^n=0. \qquad (4)$$

Данное уравнение получается из (3) с помощью подстановки $\Phi(s)e^{-\tau s}=x$.

Построив на комплексной плоскости годограф функции $W_з(j\omega)$ без запаздывания, и корни уравнения (4) $x_i=\overline{1,2}$, можно найти критическое значение $\tau_{i\text{кр}}$.

Для нахождения критического значения запаздывания $\tau_{\text{кр}}$ необходимо, чтобы годограф $\Phi(j\omega)$, построенный на одной комплексной плоскости с корнями уравнения (3), проходил через ближайший из них и не охватывал при этом другие, то есть МСАУ оказалась на границе устойчивости [10, 11]. Из этого условия получаем систему из двух уравнений относительно τ и $\omega_0$:

$$\left|\Phi^*(\tau,\omega_0)\right|=\left|x_i^*\right|,\ \arg\Phi^*(\tau,\omega_0)=\arg x_i^* * i. \qquad (5)$$

Критическое значение запаздывания $\tau_{\text{кр}} = \min\{\tau_{i\text{кр}}\},\ i = \overline{1,n}$ – это минимальное из найденных значений $\tau_i$.

Согласно известному критерию устойчивости для многомерных систем необходимо и достаточно, чтобы годограф амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) подсистем $\Phi^*(j\omega,\tau)$, для всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$, построенный на плоскости корней уравнения связи, не охватывал ни один из его корней [11].

## Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим многосвязную САУ с тремя одинаковыми подсистемами, где передаточная функция каждой равна $W(s) = \dfrac{1}{1{,}1s^2 + s}$.

Характеристики связей равны $h_2 = 2{,}015$; $h_3 = 0{,}76$.

Матричная передаточная функция:

$$W(s) = \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 1 & 1 & 1{,}35 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Добавив запаздывание в перекрестные связи, получаем

$$W(s) = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}2 \times e^{0.01s} & 0{,}1 \times e^{0.01s} \\ 1 \times e^{0.02s} & 1 & 1{,}35 \times e^{0.02s} \\ 0{,}5 \times e^{0.04s} & 0{,}1 \times e^{0.04s} & 1 \end{vmatrix},$$

где $\tau_1 = 0{,}02$; $\tau_2 = 0{,}05$; $\tau_3 = 0{,}07$.

Характеристическое уравнение связи для САУ с тремя подсистемами равно

$$D(s,x) = 1 + h_2^*(s)x^2 + h_3^*(s)x^3 = 0. \qquad (6)$$

Корни характеристического уравнения связи (6) при $\omega = 0$ равны:

$x_{1,2} = 1{,}9864 \pm 1{,}1352i$;

$x_3 = -1{,}3176 + 0{,}0000i$.

Так как корни характеристического уравнения не пересекают годограф $W(j\omega)$, следовательно, система устойчива (рис. 2). Эффективность подхода подтверждена с помощью моделирования (рис. 3) [12, 13].

Поскольку колебания затухают, следовательно, это свидетельствует об устойчивости трехсвязной МСАУ при данных значениях запаздываний.

Повлиять на устойчивость системы можно не только с помощью других значений $\tau$, но и изменив коэффициенты перекрестных связей.

Рассмотрим ту же замкнутую САУ с тремя одинаковыми подсистемами, где передаточная функция каждой равна $W(s) = \dfrac{1}{1{,}1s^2 + s}$. Характеристики связей равны $h_2 = 4{,}23$; $h_3 = -0{,}914$.

Матричная передаточная функция:

$$W(s) = \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3{,}85 & 1{,}1 \\ 0{,}9 & 1 & 1{,}7 \\ 0{,}35 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix}.$$

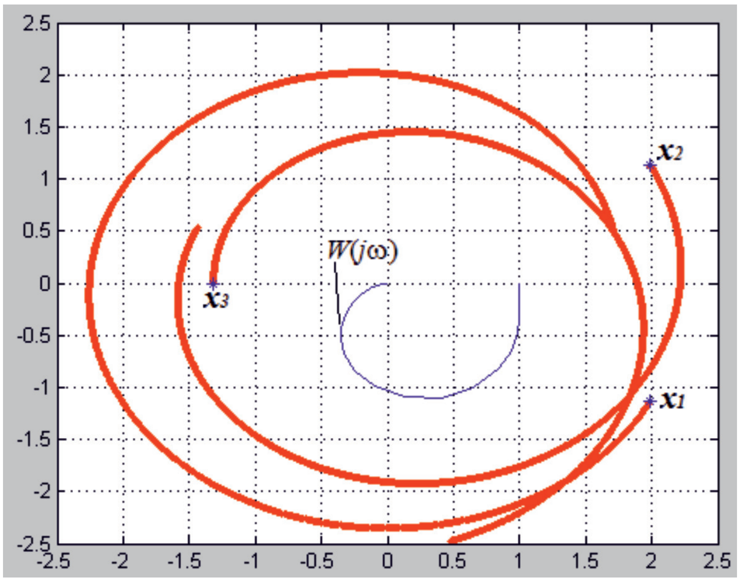


*Рис. 2. Годограф МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях*

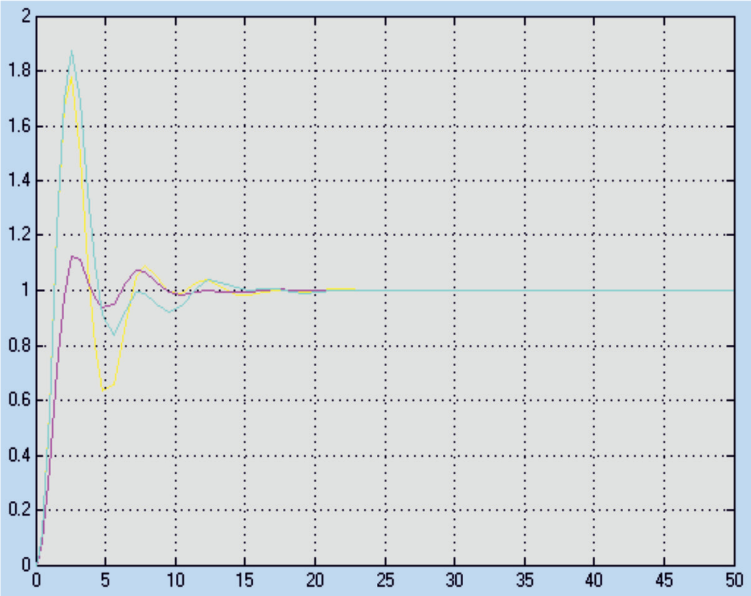


*Рис. 3. Переходный процесс МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях*

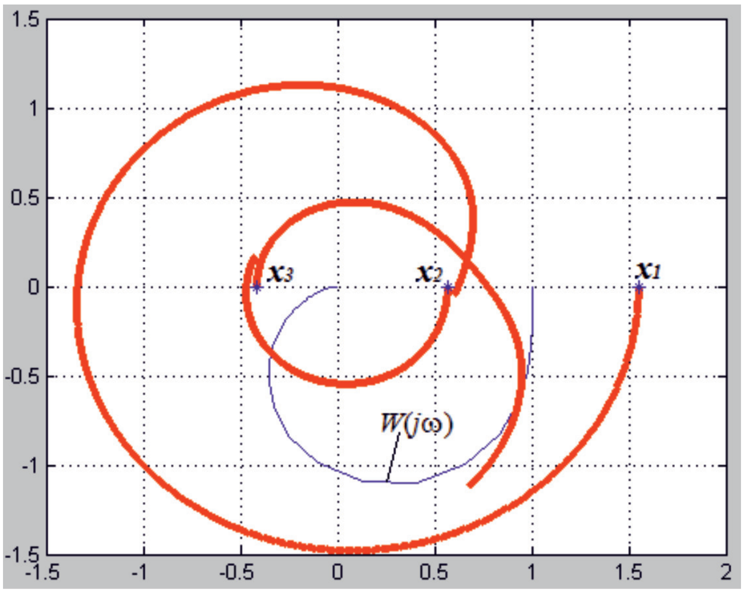


*Рис. 4. Годограф МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях*

Добавив запаздывание в перекрестные связи, получаем

$$W(s)=\begin{vmatrix} 1 & 3{,}85\times e^{0.01s} & 1{,}1\times e^{0.01s} \\ 0{,}9\times e^{0.02s} & 1 & 1{,}7\times e^{0.02s} \\ 0{,}35\times e^{0.04s} & 0{,}5\times e^{0.04s} & 1 \end{vmatrix},$$

где $\tau_1 = 0{,}02$; $\tau_2 = 0{,}05$; $\tau_3 = 0{,}07$.

Корни характеристического уравнения связей (6) при $\omega = 0$ равны

$x_1 = 1{,}5348$;
$x_2 = 0{,}5658$;
$x_3 = -0{,}4134$.

Так как один корень характеристического уравнения находится в области годографа $W(j\omega)$, следовательно, система неустойчива (рис. 4).

Эффективность подхода подтверждена с помощью моделирования (рис. 5), где видно, что система выходит из состояния равновесия в неустойчивое [13].

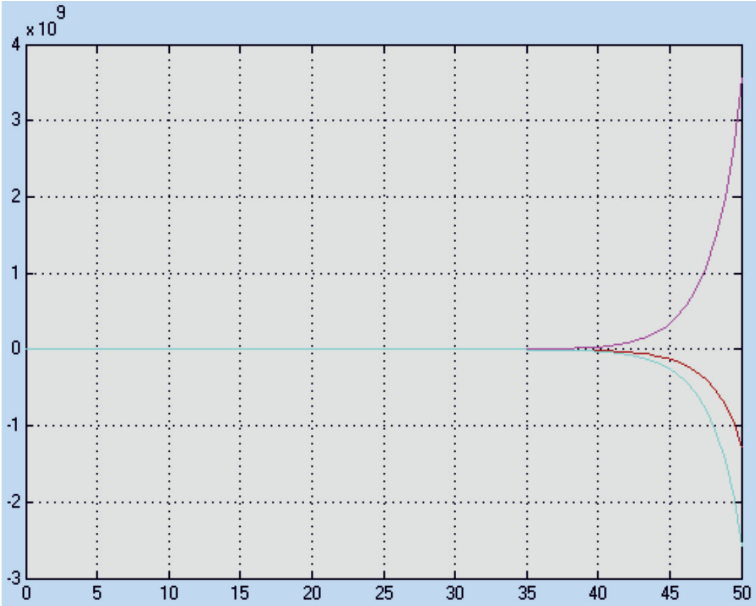


*Рис. 5. Переходный процесс МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях*

### Заключение

В работе предложен метод декомпозиции, который позволяет с помощью описания МСАУ через характеристики связей и характеристики подсистем определить устойчивость МСАУ с запаздыванием. Также рассмотрен способ нахождения критического значения запаздывания для многосвязных систем. Правильность результатов подтверждена с помощью моделирования МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Гранты РФФИ №18-08-00702 А, 18-08-01299 А).*

### Список литературы

1. Дядик В.Ф., Байдали С.А., Криницын Н.С. Теория автоматического управления: учеб. пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. 196 с.

2. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. СПб.: Питер, 2015. 336 с.

3. Елизарова А.В. Исследование линейных многосвязных систем автоматического управления с запаздыванием в прямых и перекрестных связях // Актуальные проблемы науки и техники: материалы 11 Всероссийской зимней школы-семинара магистрантов, аспирантов и молодых ученых (с международным участием): в 3 т. / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2018. С. 88–92.

4. Филимонов А.Б. Спектральная декомпозиция систем с запаздываниями. Компенсация запаздываний. М.: Издательство физико-математической литературы, 2002. 288 с.

5. Бороденко В.А. Сборник задач по теории автоматического управления: учебно-методич. пособие. Павлодар: Кареку, 2009. 112 с.

6. Ким Д.П. Сборник задач по теории автоматического управления // Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2008. 328 с.

7. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А. Исследование линейных многосвязных САУ с запаздыванием // ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2012. С. 131–135.

8. Ильясов Б.Г., Васильев В.И., Валеева Р.Г. Анализ устойчивости систем автоматического управления: учеб. пособие. Уфа: УГАТУ, 2006. 204 с.

9. Соловьев В.В., Шадрина В.В., Шестова Е.А. Исследование нечетких систем управления в среде Matlab: учеб. пособие. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015. 54 с.

10. Ильясов Б.Г., Саитова Г.А. Анализ устойчивости динамических систем, представленных в полиномиальной векторно-матричной форме // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 3–10.

11. Дорф Р.К., Бишоп Р.Х. Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2014. 831 с.

12. Поляков К.Ю. Теория автоматического управления для «Чайников». СПб., 2008. 80 с.

13. Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 911 с.