УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЭКСТРЕМУМОВ НОРМ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Заика И.В.

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)», Таганрог, e-mail: irin-zaik@yandex.ru

Предлагается компьютерный метод численной оптимизации на основе сортировки, с помощью которого идентифицируются экстремумы и нули функций по значениям и индексам данных. Представленная схема позволяет программно вычислять экстремумы произвольной функции рассматриваемого вида в области определения функции и может быть перенесена на случай функции трех и более переменных, но при этом требует увеличения затрат машинного времени. Метод отличается от известных возможностью распараллеливания, и без принципиальных изменений переносится на случай решения систем нелинейных уравнений общего вида, При этом алгоритм численной оптимизации инвариантен относительно размерности системы и вида задачи. Метод применяется для поиска экстремумов и нулей разностных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Представленный алгоритм применяется для поиска экстремумов норм решений ОДУ. На основе оптимизационного алгоритма и компьютерных схем оценки устойчивости можно оценить локально и глобально экстремальное отклонение системы от устойчивого состояния при вариации параметров. Работа включает тексты программ и описание численного эксперимента, в частности рассматривается применение схемы к анализу возмущений энергетических систем большой мощности при возмущении параметров.

Ключевые слова: идентификация экстремумов решений дифференциальных уравнений, оценка устойчивости разностных решений дифференциальных уравнений

IDENTIFICATION OF EXTREMUMS OF THE NORMS OF SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AN APPENDIX TO THE ESTIMATION OF STABILITY

Zaika I.V.

Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) Rostov State University of Economics, Taganrog, e-mail: irin-zaik@yandex.ru

A computer method of numerical optimization based on sorting is proposed, which helps identify extremums and zeros of functions by values and indexes of data. The presented scheme allows us to programmatically calculate the extrema of an arbitrary function of the form in question in the domain of the function definition and can be transferred to the case of a function of three or more variables, but this requires an increase in the expenditure of computer time. The method differs from the known by the parallelization possibility, and without fundamental changes it is transferred to the case of solving systems of nonlinear equations of general form. In this case, the numerical optimization algorithm is invariant with respect to the dimensionality of the system and the type of problem. The method is used to search for extrema and zeros of difference solutions of systems of ordinary differential equations (ODE). The presented algorithm is applied to the search for extrema of the norms of the ODE solutions. Based on the optimization algorithm and computer stability estimation schemes, it is possible to estimate locally and globally the extreme deviation of the system from a stable state with variation of parameters. The work includes the texts of programs and the description of a numerical experiment, in particular, the application of the scheme to the analysis of perturbations of high-power power systems under perturbation of parameters is considered.

Ke words: identification of extremums of solutions of differential equations, estimation of the stability of difference solutions of differential equations

Предлагаются алгоритмы для определения по индексам входных данных экстремальных значений норм решений систем ОДУ. Схема модифицируется для поиска экстремумов норм [1, 2] преобразованных разностных решений систем уравнений при вариации параметров. Анализируется экстремальное отклонение решения системы от устойчивого состояния, и на основе этих данных алгоритмы применимы к оценке устойчивости, в частности при возмущении параметров.

Вычисление экстремальных значений функции двух действительных переменных

В начале рассматривается функция одной действительной переменной $y = f(x)$. Пусть функция определена и задана на промежутке $[\ x^{(0)}, x^{(N)}\ ]$. На сетке считываются значения функции $f(x)$, $c[\ i\ ] = f(x_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Значения $c[i]$ сортируются. Процедура сортировки в программе обозначена как *sort* [3, 4]. К выходу процедуры сортировки подсоединяется специально сконструированный оператор: $\left|\ e[k-l] - e[k]\ \right| > \varepsilon$, $l = 1, 2, \dots, k-1$. С помощью данного оператора производится автоматическая идентификация каждого минимума в промежутке ε среди элементов $c[i]$.

Смысл условия в том, что в ε-промежутках входных значений функции с индексом $e[k]$ нет значений уже в отсортированном массиве $c1$, больших по значению, чем элемент с индексом [5]. Это значит, что значение функции y в узле $x0+e[k]*h$ не превосходит значений во всех точках заданной ε-окрестности.

Если оператор $|\,e[k-l]-e[k]\,|>\varepsilon$ заменить на другой оператор, с помощью которого локализуется максимум $|e[k+l]-e[k]|>\varepsilon$, $l=1,2,...,n-k$, то осуществляется вычисление максимумов функции.

Изложенная схема применяется для вычисления всех экстремумов функции двух переменных $z=f(x,y)$ [6]. Задаются границы $[\,x^{(0)},x^{(N)}\,]$ и $[\,y^{(0)},y^{(M)}\,]$, где строится область: $h=|x^{(N)}-x^{(0)}|/N$, $x_\ell=x^{(0)}+\ell h$, $\ell=0,1,...,N$, $y_\ell=y^{(0)}+\ell h$, $\ell=0,1,...,M$.

Для нахождения минимумов функции $z=f(x,y)$ перебираются значения вдоль j-го столбца по ординате OY, в результате чего находится наименьшее по строкам значение $c[j]=\min f(x_j,y_i)$, $1\le i\le M$, которое поступает на вход сортировки с индексом j.

После реализации сортировки подсоединяется представленный выше оператор, с помощью которого локализуется минимум.

Оператор для текущего узла $e[k]$ находит каждый узел $x0+e[k]*h$, в проекции ε, на абсциссу OX среди которых нет точек, предшествующим значениям в отсортированном массиве.

Значение точки минимума $xk:=x0+e[k]*h$ фиксируется, после чего локализуется ордината, в которой вычисляется приближенное минимальное значение функции двух действительных переменных.

Представленная схема позволяет программно вычислять экстремумы произвольной функции рассматриваемого вида. Алгоритм может использоваться для идентификации экстремумов функций нескольких переменных [7].

Решение нелинейных систем уравнений

Схема применяется к приближенному решению систем нелинейных уравнений. Пусть исходная система преобразована к виду $f_i(x_1,x_2,...,x_n)=0$, $i=\overline{1,n}$, где левые части являются функциями от n действительных переменных. Совокупность функций $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$ образует n-мерную вектор-функцию аргументов $x_1,x_2,...,x_n$. Пусть требуется приближенно найти все решения системы $f_i(x_1,x_2,...,x_n)=0$, $i=\overline{1,n}$ в заданной области $[\,x_1^{(0)},x_1^{(L_1)}\,]$, $[\,x_2^{(0)},x_2^{(L_2)}\,]$, …, $[\,x_n^{(0)},x_n^{(L_m)}\,]$. Строится сетка $x_{j\ell j}=x_j^{(0)}+\ell_j h_j$, $h_j=(x_j^{(L_j)}-x_j^{(0)})/L_j$, $\ell_j=0,1,...,L_j$, $j=\overline{1,n}$. Во всех ее узлах вычисляются значения нормы $\|Z\|=\sum_{i=1}^{n}|z_i|$ рассматриваемой функции, которые принимаются за элементы n-мерного массива: $c_{j\ell j}=|f_1(x_{j\ell j})|+|f_2(x_{j\ell j})|+\cdots+|f_n(x_{j\ell j})|$, где индексы соответствуют узлам многомерной сетки. Левая часть $c_{j\ell j}$ интерпретируется как дискретная функция n переменных, ее минимумы можно идентифицировать программно по изложенной схеме.

Пример. Приближенное решение системы

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-z=0,\\ x^2+y^2-z^2=0,\\ \ln x-\sqrt{y}+0,8=0 \end{array}\right\}$$

в области $x\in[0{,}1,1]$, $y\in[0,1]$, $z\in[0,1]$ вычисляется по программе Program Uravn-Nelin, представленной в листинге [2]:

```
label 21,22,23; const eps0=0.1; h=eps0/23; x00=0.1;
x11=1; y00=0; y11=1; z00=0; z11=1;
 n00=trunc(6/h); nn=n00+round(n00/2)+1;
 type vect1=array [1..2*nn+nn] of double;
vect2=array [1..2*nn+nn] of longint;
var i,j,k,k1,r,rx,ry,rz,nn0,kx,ky,kz : integer;
c,a1,az: vect1; e, ex, ey,ez: vect2;
 x,x0,x1,xk,minx,minz: double;
y,y0,y1,yk,z0,z1,z,zk: double;
function ff1 (x,y,z: double): double;
begin ff1:= x*x+y*y-z ; end;
function ff2 (x,y,z: double): double;
 begin ff2:= x*x+y*y-z*z; end;
function ff3 (x,y,z:double): double ;
begin ff3:= ln(x)-sqrt(y)+0.8; end;
function func (x,y,z: double): extended;
var p: double; i1: integer;begin
func:= abs(ff1(x,y,z))+abs(ff2(x,y,z))+abs(ff3(x,y,z)); end;
procedure minyz (var x,y,z,minx: double);
```

```
begin minx:=func(x,y,z); i:=1;
while i<= trunc((y11-y00)/h) do begin
j:=1; while j<= trunc((z11-z00)/h) do
begin y:=y0+i*h; z:=z0+j*h;
IF minx > func(x,y,z) then minx:=func(x,y,z);
j:=j+1; end; i:=i+1; end; end;
procedure minyy (var x,y,z,minz:extended);
begin minz:=func(x,y,z); i:=1;
while i<=trunc((y11-y00)/h) do begin
begin y:=y0+i*h; if minz > func(x,y,z) then
minz:=func(x,y,z) end; i:=i+1;end; end;
procedure sort(var nn0:
longint; var c: vect1; var e: vect2);
{ Описание процедуры sort }
begin x0:=x00; x1:=x11;
 y0:=y00; y1:=y11;z0:=z00; z1:=z11; nn0:=n00;
for rx:=1 to nn0 do begin
x:=x0+rx*h; minyz (x,y,z,minx); a1[rx]:=minx; end;
sort( nn0, a1, ex); kx:=1;
while kx<= nn0 do begin
for rx := 1 to kx-1 do
IF abs( ex[kx]-ex[kx-rx] ) <= eps0/h then goto 21;
xk:= x0+ex[kx]*h; for rz:=1 to nn0 do begin
z:=z0+rz*h; x:=xk;
minyy (x,y,z,minz); az[rz]:=minz; end;
sort( nn0, az, ez); kz:=1;
while kz<= nn0 do begin
for rz := 1 to kz-1 do
IF abs(ez[kz]-ez[kz-rz]) <=eps0/h then goto 22;
zk:= z0+ez[kz]*h;
for ry:=1 to nn0 do begin
 y:=y0+ry*h; a1[ry]:=func(xk,y,zk) end;
sort( nn0, a1, ey); ky:=1;
while ky<= nn0 do begin
for ry := 1 to ky-1 do
IF abs(ey[ky]-ey[ky-ry]) <=eps0/h then goto 23;
yk:= y0+ey[ky]*h;
writeln (' ', xk,' ');
writeln (' ', yk,' ');
writeln ( zk,' ', ff1(xk,yk,zk):3:5,' ',ff2(xk,yk,zk):3:5,'',ff3(xk,yk,zk):3:5);
23: ky:=ky+1; end;
22: kz:=kz+1; end;
21: kx:=kx+1; end; end.
```

Результат вычислений:

Значения аргументов			Значения компонент
X	*Y*	*z*	
0,8870	0,4609	1,0000	$f1 = -0{,}0009$ $f2 = -0{,}0009$ $f3 = -0{,}0012$

Представленный алгоритм может использоваться для решения трансцендентных уравнений [2] и по способу построения отличается от аналогов [8–10].

Идентификация экстремумов и нулей разностных решений систем ОДУ

Пусть рассматривается задача Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

и выполняются условия существования и единственности решения. Для решения (1) с малым шагом h на промежутке $[\, t_0 ,\ T \,]$ используется метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h, t_i = t_0 + ih, i = 0,1,..., N;$$
$$h = (T - t_0) / N; \lim_{N\to\infty} y_i = y. \tag{2}$$

Разностные значения из (2) рассматриваются как элементы массива

$$c[i] = y(t_{i-1}),\ i = 1, 2, ..., N. \qquad (3)$$

После сортировки массива (3) применяется оператор локализации экстремумов. Схема локализации экстремальных элементов в массиве (3) такая же, как и для массива (1) функции одной переменной, за исключением того, что в случае разностной схемы нельзя выполнить спуск. Погрешность вычисления экстремумов решения уравнения (1) полностью определяется погрешностью разностного приближения. С точностью до этой оговорки имеют место устойчивость локализации и вычисления экстремумов решения (2) [11, 12].

Для поиска нулей достаточно взять модули значений (3) и среди их минимумов выбрать близкие к нулю. Как и в случае функции одной переменной, необходимо смещение текущего отрезка по всему промежутку поиска экстремумов с дополнительной проверкой границ смещаемого отрезка на экстремум.

Схема без принципиальных изменений переносится на случай двух и более уравнений путем ее буквального повторения для каждого уравнения в отдельности. Предполагается, что для задачи Коши [13]

$$dY/dt = F(t, Y),\quad Y(t_0) = Y_0, \qquad (4)$$

где

$$F(t, Y) = \big(f_1(t, Y),\ f_2(t, Y),\ \dots,\ f_n(t, Y)\big),$$

$$Y = \big(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big),$$

$$Y_0 = \big(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}\big),$$

выполнены все условия существования и единственности, а также, что имеет место сходимость к решению рассматриваемого разностного метода на отрезке $[t_0, T]$. На вход сортировки подаются разностные приближения каждой компоненты решения:

$$y_{k(i+1)} = y_{ki} + f_k(t_i, y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}) \cdot h;$$

$$ck[i] = y_{ki}(t_{i-1});\ k = 1, 2, \dots, n;\ t_i = t_0 + ih;$$

$$i = 0, 1, ..., N;\quad h = (T - t_0)/N.$$

На выходе метода идентифицируются все локальные экстремумы каждой переменной y_k, в виде последовательности $ck[i]$, в окрестностях малого промежутка на всем отрезке $[t_0, T]$.

Нули разностных приближений компонент получатся, если на вход подавать модули значений $ck[i] = y_{ki}(t_{i-1})$ с оценкой на выходе малости минимумов. По-прежнему необходимо смещение текущего отрезка по всему промежутку поиска экстремумов с проверкой границ смещаемого отрезка на экстремум. Вместо метода Эйлера могут применяться разностные методы высшего порядка [14], численный эксперимент показывает возможность идентификации экстремумов с точностью до формата представления данных в языке программирования.

Под устойчивостью понимается устойчивость по Ляпунову [1]. Пусть рассматривается система нелинейных ОДУ:

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y, a_1, a_2, a_3),\quad Y(t_0) = Y_0,$$

где $Y(t)$ определяются по методу Эйлера, $t_0 \le t \le T$; a_1, a_2, a_3 – варьируемые числовые параметры в диапазоне $a_{10} \le a_1 \le a_{11}$, $a_{20} \le a_2 \le a_{21}$, $a_{30} \le a_3 \le a_{31}$. Возмущенные начальные данные обозначаются $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, соответственное им возмущенное решение записывается в виде $\tilde{Y}(t)$. Требуется найти все экстремальные отклонения от нуля нормы разности между возмущенным и невозмущенным решениями системы dY/dt при вариации числовых параметров.

Способ оценки отклонений опирается на схему идентификации экстремумов [4] дискретно представленных функций четырех действительных переменных. На вход алгоритма подается функция одной независимой переменной *t*, роль трех других играют варьируемые параметры. Роль функции играет норма разности вычисляемых по разностной схеме значений вектор-функций $Y(t) - \tilde{Y}(t)$. При выборе нормы:

$$\sqrt{\left| y_1[i-1] \right|^2 + \left| y_2[i-1] \right|^2 + \ldots + \left| y_n[i-1] \right|^2},$$

$$i = 1, 2, ..., N.$$

На вход метода поступает

$$c[i] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| y_k[i-1] - \tilde{y}_k[i-1] \right|^2},$$

$$i = 1, 2, ..., N.$$

При этом решения $Y(t)$, $\tilde{Y}(t)$ вычисляются по разностной схеме отдельно для каждого набора дискретизированных значений трех варьируемых параметров. Выбранные дискретизированные значения левой части $c[i]$ задают трехмерный массив, к которому добавляется еще одно измерение по независимой переменной *t*. Получится четырехмерный массив с элементами $c[i, j, \ell, r]$, где $c[i, j, \ell, r] = c[i]$ из

$$c[i] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| y_k[i-1] - \tilde{y}_k[i-1] \right|^2}\ , \ i = 1, 2, ..., N$$

при значениях параметров $a_1 = a_1[j]$,, $a_2 = a_2[\ell], a_3 = a_3[r]$, индексы которых указывают номера шагов дискретизации.

Найденные экстремумы характеризуют меру отклонения возмущенного решения от невозмущенного (меру возмущения решения). Значение глобального максимума позволит найти наибольшее значение возмущения на отрезке $t_0 \le t \le T$ при всех дискретных значениях трех параметров.

Соответственные программы приводятся в [2, 6]. В [2] детально изложено применение подхода к анализу возмущений энергетических систем при возмущении параметров. Изложенный метод применяется к оценке устойчивости на основе анализа поиска нулей характеристического полинома. Для системы [2] характеристическое уравнение имеет вид $1 + G(s)e^{-t_0 s} = 1 + e^{-t_0 s} / s(s+1)^2$ или $s^3 + 2s^2 + s + e^{-t_0 s} = 0$.

Нули полинома и трансцендентной функции в левой части последнего уравнения можно найти как минимум модуля функции $f(s) = s^3 + 2s^2 + s + e^{-t_0 s}$ при вариации параметра t_0. Данный метод переносится на поиск решений систем нелинейных уравнений, которые могут содержать трансцендентные функции, при этом вместо минимума модуля ищется минимум нормы компонент зависимых переменных на многомерной сетке.

Заключение

С помощью оптимизационного алгоритма осуществляется оценка экстремального отклонения системы от ее устойчивого состояния при вариации параметров. Особенностями предложенного метода являются его построение на основе сортировки, автоматичность программной локализации экстремальных значений разностных решений, схема может иметь произвольные размеры поиска экстремумов в области определения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-07-00100).

Список литературы

1. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир. – 1964. – 478 с.

2. Romm Y.E., Zaika I.V. Numerical sorting-based optimization as applied to general differential and nonlinear equations // Cybernetics and Systems Analysis. – 2011. – Т. 47. № 2. – С. 316–329.

3. Ромм Я.Е., Тюшнякова И.А. Метод вычисления собственных значений матриц на основе сортировки в приложении к распознаванию изображений // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. – 2006. – № 1. – С. 11.

4. Ромм Я.Е., Тюшнякова И.А. Применение сортировки для поиска нулей и особенностей функций с приложением к идентификации плоских изображений: учебное пособие. – Таганрог, 2009. – 172 с.

5. Заика И.В., Тюшнякова И.А. Обзор методов сортировки // Научный взгляд в будущее. – 2016. – Т. 2, № 1(1). – С. 206–211.

6. Заика И.В. Разработка и исследование схем оптимизации на основе алгоритмов сортировки с приложением к идентификации экстремумов решений дифференциальных уравнений: автореф. дис. … канд. техн. наук. – Таганрог, 2007. – 19 с.

7. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных / Никлаус Вирт. – Изд-во: ДМК Пресс, 2011.– 272 с.

8. Бахвалов Н., Лапин А., Чижонков Е. Численные методы в задачах и упражнениях. – Изд-во: Бином Лаборатория знаний, 2016. – 352 с.

9. Зенков А.В. Численные методы / А.В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016.– 124 с.

10. Фофанов О.Б. Алгоритмы и структуры данных / О.Б. Фофанов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 126 с.

11. Ромм Я.Е., Заика И.В., Тюшнякова И.А. Локализация экстремумов и нулей функций на основе сортировки в приложении к анализу устойчивости // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 12–4. – С. 718–723.

12. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2012. – 344 с.

13. Шипачев В. Высшая математика / Виктор Шипачев. – Изд-во: Инфра-М, 2017. – 480 с.

14. Сухарев А.Г. Численные методы оптимизации: учебник и практикум для академического бакалавриата / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 367 с.