

УДК 629.05:681.13

ПРОЦЕДУРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ОБЪЕКТА ПО ИНФОРМАЦИИ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Щипицын А.Г.

Национальный исследовательский Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, e-mail: ags477893@mail.ru

Рассмотрена задача определения начальной ориентации стартующего с Земли объекта по информации, установленной на этом объекте бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Использована априорная информация о векторе абсолютной угловой скорости Земли и векторе гравитационного ускорения начала связанной с объектом системы координат, а также использована информация, получаемая с трёх взаимно ортогональных датчиков угловой скорости и трёх взаимно ортогональных акселерометров. Применён подход использования двенадцати алгебраических уравнений относительно направляющих косинусов, шесть из которых выражают скалярный эквивалент условий векторного согласования измерительной и априорной информации, три – условия масштаба и ещё три – условия ортогональности для систем координат. Выполнены математические описания, составлены алгоритмы и разработаны программы определения направляющих косинусов от земной к объектной системе координат и имитационной модели этой процедуры с целью программного обеспечения бортового компьютера бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

Ключевые слова: стартующий с Земли объект, бесплатформенная инерциальная навигационная система, датчик угловой скорости, акселерометр, направляющие косинусы, математическое описание, алгоритм, программа, имитационная модель

PROCEDURE OF DETERMINATION OF INITIAL ORIENTATION OF OBJECT ON INFORMATION OF STRAPDOWN INERTIAL NAVIGATION SYSTEM

Shchipitsyn A.G.

National research South-Ural state University, Chelyabinsk, e-mail: ags477893@mail.ru

The task of determination of initial orientation of starting from Earth object is considered on information set on this object of the strapdown inertial navigation system. A priori information is used about the vector of absolute angular of Earth and vector of gravitational acceleration of beginning of the system of coordinates related to the object, and also the information got from three mutually orthogonal sensors of angular and three mutually orthogonal of linear accelerations is used. Approach of the use of twelve algebraic equalizations of relatively directing cosines is applied, six from that express the scalar equivalent of terms of vectorial concordance of measuring and a priori information, three are terms of scale and three are terms of perpendicularity for the systems of coordinates. Mathematical descriptions are executed, algorithms are made and the programs of determination of directing cosines are worked out from earthly to the objective system of coordinates and simulation model of this procedure with the purpose of airborne computer of the strapdown inertial navigation system software.

Keywords: starting from Earth object, strapdown inertial navigation system, sensor of angular, accelerometer, directing cosines, mathematical description, algorithm, program, simulation model

Указанная в заголовке статьи процедура в другой терминологии называется начальной выставкой навигационной системы [1, 2]. От точности начальной выставки системы зависит точность переменных навигационной информации объекта, так как процедурой начальной выставки определяются начальные условия, необходимые при интегрировании системы дифференциальных уравнений относительно таких переменных ориентации объекта, как направляющие косинусы от земной системы координат к объектной системе координат. Указанные начальные условия – это информация, которую необходимо иметь в бортовом компьютере до навигации объекта и которая может быть определена с использованием внешних по отношению к объекту источников информации, например с использованием информации с наземной навигационной системы,

если она точнее системы, установленной на борту объекта. В данной работе, в отличие от задач, рассмотренных в работах [3–6], поставлена задача определения начальной ориентации объекта относительно Земли на основе информации бесплатформенной инерциальной навигационной системы этого же объекта, предполагая, что её точность является допустимой для начальных условий интегрирования указанной выше системы дифференциальных уравнений.

Постановка задачи

Объект, с которым связана система координат $O_Y Y_1 Y_2 Y_3$ (сокращённо: СК Y), находится на Земле, с которой связана система координат $O_Z Z_1 Z_2 Z_3$ (сокращённо: СК Z), начало которой находится на поверхности Земли, ось $O_Z Z_1$ направлена на восток, ось $O_Z Z_2$ – на север, ось $O_Z Z_3$ – по вертикали от

центра сферической Земли с радиусом R и имеющей только собственное вращение с абсолютной постоянной угловой скоростью, величина которой равна u , а вектор направлен по оси вращения SN в сторону Северного полюса N . Гравитационное поле Земли полагаем сферическим с постоянным гравитационным ускорением, величина которого равна g в объеме объекта, а его вектор \vec{g} направлен к центру Земли. Начало O_Z СКЗ находится на широте, определяемой углом φ .

Задача заключается в определении направляющих косинусов (НК) от СКЗ к СКУ вида

$$C_{ij} = \vec{Z}_i \vec{Y}_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

на основе имеющейся априорной информации о величинах u , R , g , φ и на основе измеряемой бесплатформенной инерциальной навигационной системой (БИНС) информации о трёх проекциях Ω_j вектора $\vec{\Omega}$ абсолютной угловой объекта и трёх проекциях A_j вектора \vec{A} кажущегося ускорения точки O_Y объекта, которую полагаем при рассматриваемой процедуре совпадающей с точкой O_Z ; \vec{Z}_i, \vec{Y}_j – орты соответственно осей координат Z_j, Y_j . Кроме определения величин (1), необходимо указать условия существования и единственности решений поставленной задачи.

Математическое описание определения направляющих косинусов

Основой для решения поставленной задачи являются два векторных уравнения

$$\vec{\Omega} = \vec{u}, \quad \vec{A} = \vec{a}, \quad (2)$$

где \vec{a} – вектор кажущегося ускорения точки O_Z , определяемый зависимостью

$$\vec{a} = -(u^2 R + g) \vec{Z}_3, \quad (3)$$

где слагаемым $u^2 R$ определено центростремительное ускорение точки O_Z , вектор которого направлен противоположно орту \vec{Z}_3 . Согласно постановке задачи, векторы \vec{u} , \vec{a} определены проекциями в СКЗ:

$$\begin{aligned} u_1 = 0, \quad u_2 = u \cos \varphi, \quad u_3 = u \sin \varphi; \\ a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -(u^2 R + g). \end{aligned} \quad (4)$$

Так как информация о векторах $\vec{\Omega}$, \vec{A} поступает с БИНС, то эти векторы следует определить проекциями в СКУ:

$$\vec{\Omega} = \sum_{j=1}^3 \Omega_j \vec{Y}_j, \quad \vec{A} = \sum_{j=1}^3 A_j \vec{Y}_j. \quad (5)$$

Подставляя зависимости (5) в уравнение (3), умножая полученные равенства ска-

лярно на орты \vec{Z}_i и используя обозначения (1), получаем две системы уравнений относительно НК C_{ij} по три уравнения в каждой:

$$\sum_{j=1}^3 \Omega_j C_{ij} = u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^3 A_j C_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Из равенств (1) следуют зависимости между ортами:

$$\vec{Z}_i = \sum_{j=1}^3 C_{ij} \vec{Y}_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Умножая эти векторные равенства скалярно на орты \vec{Z}_k и используя обозначения (1), получаем ещё две системы уравнений относительно НК C_{ij} по три уравнения в каждой, выражающие соответственно условия масштаба и ортогональности для НК:

$$\sum_{j=1}^3 (C_{ij})^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

$$C_{11} C_{21} + C_{12} C_{22} + C_{13} C_{23} = 0,$$

$$C_{11} C_{31} + C_{12} C_{32} + C_{13} C_{33} = 0,$$

$$C_{21} C_{31} + C_{22} C_{32} + C_{23} C_{33} = 0. \quad (10)$$

Из системы (6) найдём

$$C_{i3} = (1/\Omega_3) \left(u_i - \sum_{j=1}^2 \Omega_j C_{ij} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Подставив выражения (11) в уравнения (7), получим систему

$$\sum_{j=1}^2 P_j C_{ij} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где введены обозначения

$$P_j = A_j - A_3 \Omega_j / \Omega_3, \quad j = 1, 2;$$

$$Q_i = a_i - A_3 u_i / \Omega_3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Из системы (12) найдём

$$C_{i2} = \rho_i - \rho_0 C_{i1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Подставив выражения (14) в зависимости (11), после несложных преобразований получим

$$C_{i3} = \eta_i + \eta_0 C_{i1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где введены обозначения

$$\rho_0 = P_1 / P_2, \quad \rho_i = Q_i / P_2, \quad \eta_0 = [\Omega_2 (P_1 / P_2) - \Omega_1] / \Omega_3,$$

$$\eta_i = [u_i - (\Omega_2 Q_i / P_2)] / \Omega_3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Подставив выражения (14), (15) в уравнения (9), получим три квадратных уравнения относительно НК C_{i1} , $i = 1, 2, 3$:

$$X_i^2 - 2P_{0i}X_i + Q_{0i} = 0, i = 1, 2, 3. \quad (17)$$

где обозначены неизвестные и коэффициенты этих уравнений:

$$X_i = C_{i1}, P_{0i} = (\rho_0\rho_1 - \eta_0\eta_i)/(1 + \rho_0^2 + \eta_0^2), Q_{0i} = (\rho_i^2 + \eta_i^2 - 1)/(1 + \rho_0^2 + \eta_0^2), i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Решая уравнения (17), получаем

$$X_i^{(1)} = P_{0i} + \sqrt{D_{0i}},$$

$$X_i^{(2)} = P_{0i} - \sqrt{D_{0i}}, i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

где введены обозначения:

$$D_{0i} = P_{0i}^2 - Q_{0i}, i = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Анализируя проделанные выкладки, можно указать на условия существования решения:

$$\Omega_3 \neq 0, P_2 \neq 0$$

или с учётом выражения (13)

$$A_2 - A_3\Omega_2/\Omega_3 \neq 0,$$

$$D_{0i} = P_{0i}^2 - Q_{0i} > 0, i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Можно показать, что условия (21) выполняются, если векторы \vec{u} , \vec{a} ненулевые и неколлинеарны. То, что они ненулевые, очевидно. А требование их неколлинеарности означает, что рассматриваемая процедура начальной выставки не может быть реализована на полюсах Земли. Неоднозначность решения обусловлена наличием двух корней (20) уравнения (17), а единственность решения достигается проверкой выполнения условий ортогональности (10) для НК C_{ij} для каждого из корней. Для этого найдём все НК, используя решения (20) и выражения (14), (15):

$$C_{i1}^{(k)} = X_i^{(k)}, C_{i2}^{(k)} = \rho_i - \rho_0 X_i^{(k)},$$

$$C_{i3}^{(k)} = \eta_i + \eta_0 X_i^{(k)}, i = 1, 2, 3; k = 1, 2. \quad (22)$$

Подставляя найденные решения (22) в уравнения (10) при $k = 1, 2$, находим тот индекс k , при котором эти уравнения обращаются в тождества, тем самым решаем вопрос о единственности решений.

Математическое описание имитационной модели начальной выставки

Выполненное выше математическое описание определения НК от земной СК к объектной СК основано на использовании измерений величин проекций $\Omega_j, A_j, j = 1, 2, 3$ датчиками БИНС объекта. Однако до

использования БИНС следует иметь вычислительный алгоритм определения НК, который можно было бы установить в бортовой компьютер с гарантией, что этот алгоритм будет достоверно и достаточно точно вычислять требуемые НК на основе заданной априорной информации о величинах u, φ, R, g и указанной измеряемой информации $\Omega_j, A_j, j = 1, 2, 3$. Для обеспечения указанной гарантии достоверности и точности вычислений НК в бортовом компьютере необходимо построить имитационную модель измерений $\Omega_j, A_j, j = 1, 2, 3$ на основе заданной ориентации объекта относительно Земли.

Для построения указанной имитационной модели введём углы поворотов СКУ относительно СКЗ q_1, q_2, q_3 в последовательности 1-2-3, то есть поворот на угол q_1 выполнен вокруг оси Z_1 , поворот на угол q_2 выполнен вокруг второй оси СК, получившейся после первого, поворот на угол q_3 выполнен вокруг третьей оси СК, получившейся после второго поворота. Можно показать, что компоненты матриц НК, соответствующих отдельным указанным выше поворотам, имеют вид

$$S_{11}^{01} = 1, S_{12}^{01} = 0, S_{13}^{01} = 0, S_{21}^{01} = 0,$$

$$S_{22}^{01} = \cos q_1, S_{23}^{01} = -\sin q_1, S_{31}^{01} = 0,$$

$$S_{32}^{01} = \sin q_1, S_{33}^{01} = \cos q_1; \quad (23)$$

$$S_{11}^{12} = \cos q_2, S_{12}^{12} = 0, S_{13}^{12} = \sin q_2, S_{21}^{12} = 0,$$

$$S_{22}^{12} = 1, S_{23}^{12} = 0, S_{31}^{12} = -\sin q_2, S_{32}^{12} = 0,$$

$$S_{33}^{12} = \cos q_2; \quad (24)$$

$$S_{11}^{23} = \cos q_3, S_{12}^{23} = -\sin q_3, S_{13}^{23} = 0,$$

$$S_{21}^{23} = \sin q_3, S_{22}^{23} = \cos q_3, S_{23}^{23} = 0, S_{31}^{23} = 0,$$

$$S_{32}^{23} = 0, S_{33}^{23} = 1. \quad (25)$$

Используя эти компоненты, найдём компоненты матрицы НК от СКЗ к СКУ:

$$S_{ij} = \sum_{k=1n=1}^3 \sum_{l=1}^3 S_{ik}^{01} S_{kn}^{12} S_{nj}^{23}, i, j = 1, 2, 3. \quad (26)$$

Далее определяем выражения для имитационных моделей измерений:

$$\Omega_j = \sum_{i=1}^3 S_{ij} u_i, A_j = \sum_{i=1}^3 S_{ij} a_i, j = 1, 2, 3, \quad (27)$$

где проекции u_i, a_i определяются формулами (4). Используя величины (27) в описанной выше процедуре определения НК C_{ij} и опре-

делив их, далее сравниваем полученные НК C_{ij} с НК S_{ij} , вычисляя модули разностей вида

$$\Delta C_{ij} = |C_{ij} - S_{ij}|, i, j = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Заметим, что величины (28) можно рассматривать в качестве относительных погрешностей определяемых НК, так как наибольшая величина каждого НК не превышает единицы. А поэтому в качестве результирующей относительной погрешности всех девяти НК может быть принята величина

$$\Delta C = \left(\frac{1}{9}\right) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Delta C_{ij}, \quad (29)$$

которая может быть принята за меру вычислительной погрешности при определении НК и которая должна быть не больше заданной допустимой относительной погрешности ΔC^* определения НК, то есть должна удовлетворять неравенству

$$\Delta C \leq \Delta C^*. \quad (30)$$

Алгоритм имитационной модели определения направляющих косинусов

Выполненные выше математические описания позволяют сформулировать последовательность операций ввода исходной информации, вычислений и вывода результатов:

1. Задать:
 - u – модуль вектора абсолютной угловой скорости Земли;
 - g – модуль вектора гравитационного ускорения начала СКУ;
 - R – радиус сферической Земли;
 - φ – широта начала СКУ;
 - $q_k, k = 1, 2, 3$ – углы ориентации СКУ относительно СКЗ;
 - ΔC^* – допустимая относительная погрешность определения НК.
2. Вычислить u_p, a_i по формулам (4) и вычислить S_{ij} по формулам (23)–(26).
3. Вычислить Ω_j, A_j по формулам (27).
4. Вычислить P_j^i, Q_i по формулам (13).
5. Вычислить ρ_0, η_0, η_i по формулам (16).
6. Вычислить P_{0i}^i, Q_{0i} по формулам (18).
7. Вычислить D_{0i} по формулам (20).
8. Если $\Omega_3 = 0$ или $P_2 = 0$ или $D_{0i} < 0$, то вывести сообщение: «Не выполняется условие существования решения» и закончить алгоритм.
9. Вычислить $X_i^{(k)}$ по формулам (19).
10. Вычислить $C_{i1}^{(k)}, C_{i2}^{(k)}, C_{i3}^{(k)}$ по формулам (22).
11. Определить единственность решений подстановкой величин $C_{i1}^{(k)}, C_{i2}^{(k)}, C_{i3}^{(k)}$ в уравнения (10) при $k = 1, 2$ и определения индекса k , при котором эти уравнения обра-

щаются в тождества; в результате этой операции определить НК C_{ij} .

12. Вычислить ΔC_{ij} по формулам (28).
13. Вычислить ΔC по формуле (29).
14. Проверить выполнение неравенства (30), и если оно не выполняется, то вывести сообщение: «Относительная погрешность вычисления НК C_{ij} превышает допустимую» и закончить алгоритм.
15. Если алгоритм игнорирует пункты 8 и 14, то вывести величины C_{ij} с сообщением: «Задача определения НК решена».

Исследование работы алгоритма имитационной модели заключается в анализе причин невыполнения условий существования решений (пункт 8) и неудовлетворения вычисленных НК допустимой относительной погрешности (пункт 14) для конкретных численных значений исходных данных. После выяснения этих причин и удаления из приведённого выше алгоритма пунктов 8 и 14 можно зафиксировать алгоритм определения НК для бортового компьютера БИНС, который будет включать в себя вычислительные операции пунктов с 3-го по 11-й, при замене пункта 3 формулировкой: «Измерить сигналы Ω_j датчиков угловой скорости и сигналы A_j акселерометров БИНС».

О программе имитационной модели определения направляющих косинусов

На основе сформулированного выше алгоритма имитационной модели определения НК разработана программа, на вход которой подаётся исходная информация согласно пункту 0 алгоритма, а выходом которой являются вычисленные ГК, величина результирующей относительной погрешности вычисления НК, а также такие промежуточные результаты, как информация об удовлетворении условий существования решений, номер индекса k , при котором эти решения являются единственными. Разработанная программа имитационной модели определения направляющих косинусов позволяет анализировать влияние априорной информации о характеристиках местности (u, g, R, φ) и исходной ориентации объекта относительно Земли (q_1, q_2, q_3) на условия существования и единственности решений. Разработанная программа определения направляющих косинусов с учётом замечаний, сделанных после сформулированного алгоритма, и являющаяся частью указанной выше программы может быть использована для инсталляции её в бортовой компьютер БИНС.

Выводы

1. Для выполнения математического описания применён подход использова-

ния двенадцати алгебраических уравнений относительно направляющих косинусов, шесть из которых выражают скалярный эквивалент условий векторного согласования измерительной и априорной информации, три – условия масштаба и ещё три – условия ортогональности для систем координат.

2. Составлен алгоритм и разработана программа имитационной модели определения направляющих косинусов, которая может быть использована для программного обеспечения процедуры начальной выставки в бортовом компьютере бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

Заключение

Применённый подход к выполнению математического описания может быть распространён на случай начальной выставки бесплатформенной инерциальной навигационной системы подвижного объекта, находящегося на борту подвижного носителя, на основе информации его навигационной системы.

Список литературы

1. Липтон А. Выставка инерциальных систем на подвижном основании. – М.: Наука, 1971. – 168 с.
2. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – СПб.: ГИЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – 280 с.
3. Щипицын А.Г. К задаче определения начальной ориентации объекта бесплатформенной инерциальной навигационной системой / А.Г. Щипицын, М.А. Щипицына, С.В. Слепова // XXV Российская школа по проблемам науки и технологий, посвященная 60-летию Победы. – Екатеринбург: УрО РАН, 2005. – С. 266–268.
4. Щипицына М.А. Математическая модель синтеза точности определения параметров начальной ориентации объекта бесплатформенной инерциальной навигационной системой // Сб. рефератов научно-исследовательских работ студентов по конкурсу грантов студентов, аспирантов и молодых ученых вузов Челябинской области. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – С. 152–153.
5. Щипицына М.А., Устюгов М.Н. Математическая модель для задачи определения параметров начальной ориентации объекта бесплатформенной инерциальной навигационной системой // Труды XXVI Российской школы по проблемам науки и технологий. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 241–243.
6. Щипицына М.А., Устюгов М.Н. Математическая модель для задачи синтеза точности начальной выставки бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Сб. научн. тр. «Информационные системы и устройства». – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – С. 102–108.