

УДК 535.65: 621.397

ПОРОГИ ЦВЕТОРАЗЛИЧЕНИЯ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ А. ЭЙНШТЕЙНА

Ложкин Л.Д.

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, e-mail:
Leon.lozhrin@yandex.ru*

Воспринимаемая равноконтрастная трехмерная цветовая шкала, как пишет Д. Джадд и Г. Вышецки, явилась бы не только большим научным достижением, но и оказалась бы полезной с любой точки зрения. Ее применение упростило бы определение цвета и установление цветовых допусков, внесло бы ясность в вопрос интерпретации одномерных цветовых шкал для идентификации несколько отличающихся цветов, служило бы руководством при изготовлении стандартных образцов цвета и оказало бы помощь в выборе гармоничных цветовых сочетаний. К сожалению, попытки создать такую шкалу до сих пор не привели к успеху. Скорее наоборот, они подтвердили предположение, что такую строго равноконтрастную трехмерную шкалу вообще невозможно создать. Однако эти попытки, по крайней мере, указывают на то, что возможны достаточно хорошие аппроксимации идеального равноконтрастного цветового пространства. Но в этом направлении проводится много работ, имеющих практическое значение. Но тем не менее в данной статье будет продолжено разработка строго равноконтрастных цветовых шкал, причем особое внимание будет уделено выводу численных выражений для таких шкал.

Ключевые слова: Строго равноконтрастное цветовое пространство, цветовой локус, колориметрическая система МКО, метрический тензор, тензор кривизны, сферическая система координат, цветовой тензор, базис подвижного репера

THRESHOLDS OF COLOR DISCRIMINATION AND THE GENERAL THEORY EINSTEIN'S RELATIVITY

Lozhkyn L.D.

*Volga Region State University of Telecommunications and Informatics, Samara,
e-mail: Leon.lozhrin@yandex.ru*

Perceived *ravnokonstrastnaya* three-dimensional color scale, according to D. Judd and G. Vyshetski, was not only a great scientific achievement, but also proved to be useful-tion from any point of view. Its application would simplify the definition of colors and setting color tolerances, would bring clarity to the question of interpretation of the one-dimensional color scales to identify several different colors, would serve as a guide in the *manufac-tovlenii* standard color swatches, and to assist in the selection of harmonious color combinations. Unfortunately, attempts to create such a scale has not yet been successful. On the contrary, they have confirmed the assumption that this is strictly a three-dimensional scale *ravnokonstrastnuyu* impossible to create. These attempts, however, at least indicate that there may be good enough approximation of an ideal color space *ravnokonstrastnogo*. But in this direction is carried out many works of practical value. Nevertheless, the development strictly *ravnokonstrastnyh* color scales will continue in this article, and special attention will be given to the conclusion of numerical expressions to such scales.

Keywords: Strictly *ravnokonstrastnoe* color space, color locus, CIE colorimetric system, the metric tensor, curvature tensor, a spherical coordinate system, the color tensor basis of the moving frame

Если наблюдателю предложить белый, черный и группу серых образцов цветов и, попросить его выбрать из них такой, который в равной степени отличается и от белого, и от черного, он столкнется с небольшой трудностью, поскольку оценка относительной величины двух больших цветовых различий, в конечном счете, основана только на субъективном впечатлении. Это является частным случаем определения цветовых различий, который Ньюхолл назвал методом отношений цветовых различий [1]; в данном случае отношение составляет 1:1. Однако нужный серый цвет можно определить, исходя из усредненной оценки нескольких наблюдателей, причем желаемая точность зависит только от количества на-

блюдателей и числа сделанных ими оценок. Затем цветовой интервал, находящийся между черным и средне-серым можно поделить пополам, аналогично можно поступить с интервалом – между белым и средне-серым цветами. Таким образом, диапазон от черного до белого образует равноконтрастную шкалу светлоты, состоящую из пяти равноудаленных по субъективному ощущению цветов. Это был один из методов, используемых для определения шкалы серых цветов по Манселлу [2, 3].

Другой метод создания равноконтрастной шкалы светлоты (начиная с черного цвета) состоит в выборе чуть более светлого серого цвета, затем чуть более светлого, чем этот выбранный цвет, и так до тех пор, пока

мы не подойдем к белому или близкому к белому цвету.

Эти же два метода могут использоваться для установления равноконтрастной шкалы светлоты в интервале от любого светлого до любого темного цветов, при условии наличия образцов промежуточных цветов, незначительно отличающихся друг от друга.

Большой интерес вызывает метод преобразование цветового локуса, предложенный в [4, 5].

Постановка задачи

В начале 40 годов прошлого столетия появились публикации результатов опытов, проведенных Мак-Адамом по выяснению порогов цветоразличения [6-10]. Аналогичные опыты были также проведены Стайлсом [11], Вышецки [12], а также повторно самим Мак-Адамом. Их результаты в целом согласовывались с результатами, полученными изначально Мак-Адамом и графически отображались в виде эллипсов на цветовой диаграмме МКО 1931 г. (x, y). На рис. 1. изображены результаты опытов Мак-Адама, которые впоследствии получили название «Эллипсы Мак-Адама».

Из рис. 1 можно сделать весьма интересное заключение. Поскольку в пределах любого эллипса глаз наблюдателя не видит цветового различия, то с точки зрения глаза эллипс представляет собой точку, с координатами на цветовой диаграмме МКО, определяемой координатами любой из точек эллипса. Но если измерять координаты цветности с помощью высокоточного прибора в пределах области эллипса, мы получим конкретные цветности для каждой точки внутри области, ограниченной эллипсом Мак-Адама. Отсюда следует, что с точки зрения глаза наблюдателя эллипсы Мак-Адама не имеют центра.

Автором был разработан программный комплекс по измерению порогов цветоразличения [13, 14], описание которого дано в [15, 16]. Впоследствии этот программный комплекс был изменен. Суть этого изменения заключалась в том, что пороги цветоразличения определялись в зависимости от яркости излучения сравниваемых цветов (яркости стимула в процентном соотношении). На рис. 2 (нижняя часть рисунка) показаны результаты эксперимента (рисунок имеет иллюстративный характер). Экстраполируя кривую зависимости величины порога до значения яркости равной нулю, получим величину порога равную бесконечности, а точнее порог, ограниченный кривой цветового локуса. Известно, что при уменьшении яркости включается механизм ночного или сумрачного зрения, т.е. в про-

цесс зрения включаются палочки глаза, а колбочки выключаются, как имеющие цветочувствительность в отличие от палочек. Имеет место эффект Пуркинье («ночью все кошки серые»).

Очевидно, что при увеличении яркости излучения до очень больших значений, цветочувствительность глаза также будет уменьшаться. Это явление можно объяснить тем, что распад йодопсина (светочувствительное вещество колбочек глаза) будет происходить быстрее, нежели его восстановление. Глаз станет цветослепым, т.е. величина порога цветоразличения будет увеличиваться по мере увеличения яркости излучения и, при очень больших яркостях порог цветоразличения будет равен бесконечности, точнее эта бесконечность будет ограничена цветовым локусом. Конечно, такая яркость в природе, а тем более в телевидении (на экране монитора), не реализуется и может быть рассмотрена только теоретически. Графически это можно представить так, как это показано на рис. 2 (верхняя часть рисунка).

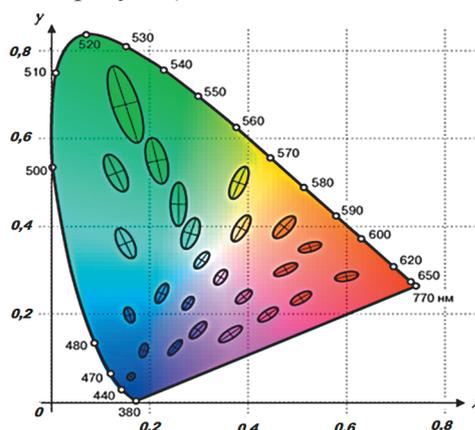


Рис. 1. Эллипсы Мак-Адама (для наглядности размеры эллипсов увеличены в 10 раз)

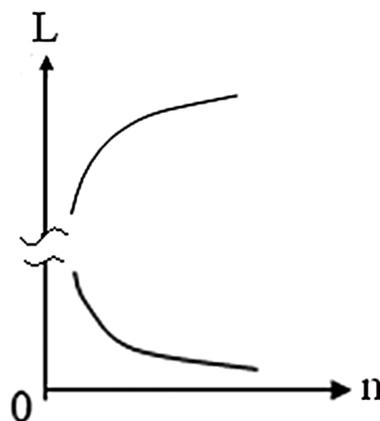


Рис. 2. Зависимость величины порога цветоразличения n от яркости L

Цветовое пространство

Посмотрим на картину в целом (рис. 3). На этом рисунке изображен однополостный гиперboloид [17]. Прежде чем рассуждать далее, необходимо ввести некоторые обозначения:

1. Горизонт цвета (аналогично «горизонт событий в общей теории относительности (ОТО)» – под этим здесь будем понимать некий объем, в котором, с точки зрения цветоразличения глаза, цвет однородный;

2. Бесконечность – область, ограниченная цветовым локусом;

Рассмотрим некоторые области этого гиперboloида. О верхней и нижней частях рисунка, окрашенных соответственно в белый и черный цвета, можно сказать, что горизонт событий уходит в бесконечность. Сами эти поверхности линейны, плоские и имеют евклидовую геометрию. Более сложную структуру имеет пространство, расположенное в центральной части рисунка.

Горизонт цвета имеет малый радиус, а это обстоятельство указывает, что пространство, заключенное под горизонтом цвета, искривлено и замкнуто, аналогично, как это имеет место в пространстве черных дыр в фундаментальной теории эволюции звезд. В связи с этим можно для решения вопросов порогов цветосприятия, а также для создания новых равноконтрастных цветовых систем, в которых бы все эллипсы Мак-Адама трансформировались в одинаковые окружности, а в трехмерном пространстве – в шары равного диаметра, можно использовать уравнение Эйнштейна [18 - 21].

Иногда встречается название — уравнения гравитационного поля в общей теории относительности (ОТО), связывающие между собой метрику искривленного пространства-времени со свойствами заполняющей его материи. Этот термин используется и в единственном числе: «уравнение Эйнштейна», так как в тензорной записи это одно уравнение, хотя в компонентах оно представляет собой систему уравнений.

Выглядят уравнения следующим образом [16 - 18]:

$$\left[\ddot{R}_{ij} \right] - \frac{R}{2} \left[\ddot{g}_{ij} \right] + \Lambda \left[\ddot{g}_{ij} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \left[\ddot{T}_{ij} \right] \quad (1)$$

или

$$\left[\ddot{G}_{ij} \right] + \Lambda \left[\ddot{g}_{ij} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \left[\ddot{T}_{ij} \right]$$

где $\left[\ddot{R}_{ij} \right]$ — тензор Риччи, получающийся из тензора кривизны пространства-времени $\left[\ddot{R}_{ijm} \right]$ посредством свёртки его по паре индексов, R — скалярная кривизна, то есть свёрнутый тензор Риччи, $\left[\ddot{g}_{ij} \right]$ — метрический тензор, Λ — космологическая постоянная,

а $\left[\ddot{T}_{ij} \right]$ представляет собой тензор энергии-импульса материи, (c — скорость света в вакууме, G — гравитационная постоянная), $\left[\ddot{G}_{ij} \right] = \left[\ddot{R}_{ij} \right] - \frac{R}{2} \left[\ddot{g}_{ij} \right]$ — тензор А. Эйнштейна. Так как все входящие в уравнения тензоры симметричны, то в четырёхмерном пространстве-времени эти уравнения равносильны скалярным уравнениям.

Уравнения Эйнштейна не налагают никаких ограничений на используемые для описания пространства-времени координаты, то есть обладают свойством общей ковариантности, и они ограничивают выбор лишь 6 из 10 независимых компонент симметричного метрического тензора. Поэтому их решение неоднозначно без введения некоторых ограничений на компоненты метрики, соответствующих однозначному заданию координат в рассматриваемой области пространства-времени, и называемых, поэтому обычно *координатными условиями* [19 - 21]. Решая уравнения Эйнштейна совместно с правильно подобранными координатными условиями, можно найти все 10 независимых компонент симметричного метрического тензора. Этот метрический тензор (метрика) описывает свойства пространства-времени в данной точке и используется для описания результатов физических экспериментов.

Он позволяет задать квадрат интервала в искривленном пространстве:

$$\partial S^2 = \left[\ddot{g}_{ij} \right] (x) \partial x^a \partial x^b \quad (2)$$

который определяет «расстояние» в физическом (метрическом) пространстве.

Рассмотрим в отдельности составляющие уравнения (1). Это уравнение предполагает четырехмерное пространство-время, поэтому будем рассматривать его компоненты в четырехмерном пространстве. Согласно [22], в так называемых Шварцшильдовских координатах из которых 3 последних аналогичны сферическим, наиболее физически важной части пространства-времени Шварцшильда с топологией $R^2 \times S^2$ (произведение области двумерного евклидова пространства и двумерной сферы), имеет вид:

$$\left[\ddot{g}_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

где $r_s = r_g$ — радиус Шварцшильда, равный гравитационному радиусу.

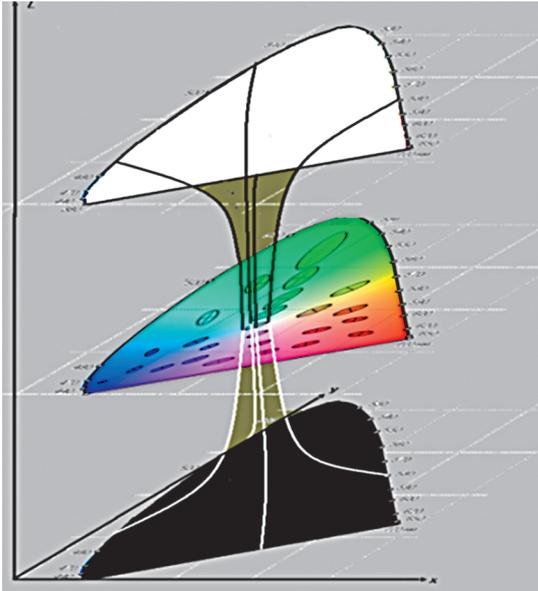


Рис. 3. Зависимость порогов цветоразличения от яркости излучения

Интервал в этой метрике записывается как:

$$\partial S^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \partial t^2 - \frac{\partial r^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} - r^2 (\sin^2 \theta \partial \varphi^2 + \partial \theta^2)$$

На рис. 4 приведена графическая интерпретация пространства Шварцшильдом.

Следующим компонентом уравнения (1) – является тензор энергии- импульса. Симметричный тензор энергии-импульса, определенный в пространстве-времени, который одновременно задает плотность энергии и ее потоков и определяет закон изменения этих величин при переходе от одной системы отчета в другую.

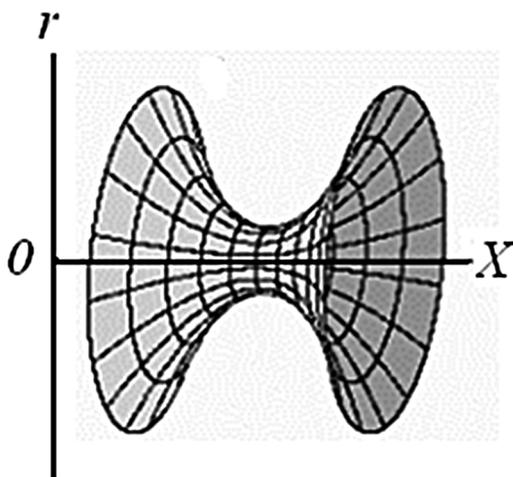


Рис. 4. Графическая интерпретация решения Шварцшильда

Тензор энергии-импульса в общем случае имеет вид [23]:

$$[\tilde{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} W & S_z/c & S_y/c & S_x/c \\ S_z/c & \dot{\partial}_{xx} & \dot{\partial}_{xy} & \dot{\partial}_{xz} \\ S_y/c & \dot{\partial}_{yx} & \dot{\partial}_{yy} & \dot{\partial}_{yz} \\ S_x/c & \dot{\partial}_{zx} & \dot{\partial}_{zy} & \dot{\partial}_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

где W – плотность энергии; S_i – поток энергии в направлении, задаваемом

$$\dot{\partial}'_v = \rho v_i v_j + \delta_{ij}, \quad i, v = x, y, z.$$

О тензоре кривизны пространства, тензоре Риччи $[\tilde{R}_{ij}]$ поговорим позже.

Космологическая постоянная или энергия вакуума Λ в нашем случае будет равна нулю.

Итак, разобрано уравнение (1), причем все составляющие (кроме тензора Риччи) рассмотрены в матричной форме.

Для применения уравнения (1) для преобразования цветового пространства в строго равноконтрастное цветовое пространство поступим следующим образом. Обычно в телевидении для оценки цвета применяют колориметрическую систему МКО 1960 г. (u, v, w), но не исключается применение колориметрической системы МКО 1931 г. (x, y, z). Мы остановимся на первой системе (МКО 1960 г. (u, v, w)). В этой системе среднее значение порога цветоразличения равно 0,0038. Будем считать, что эта система цветности – трехмерна и имеет взаимно перпендикулярные оси u, v, w . Это обычное трехмерное метрическое пространство на поверхности цветового пространства выбранной колориметрической системы. И эта метрика, в принципе, ни чем не отличается от метрики окружающего пространства, за исключением – единиц измерения. В качестве четвертого измерения в нашем цветовом пространстве используем яркость излучения света. Отметим, что каждой точке цвета на цветовом локусе [24] соответствует своя яркость. Известно, что яркость белого цвета, в частности в телевидении, является максимальной яркостью. В наших преобразованиях необходимо пронормировать яркость любой точки на цветовом локусе относительно белого цвета.

Поскольку динамический диапазон яркости, воспринимаемый человеческим глазом, составляет примерно семь порядков – условно говоря, от 1 до 10 млн. единиц. Чтобы получить представление лишь о части этого диапазона, можно отметить, что контраст между ярким солнечным днем и темной безлунной ночью составляет около одного миллиона к единице. Для восприятия

такого большого динамического диапазона яркостей у нашего глаза характеристика свет-сигнал подчиняется логарифмическому закону. Поэтому после приведения яркости заданной точки на цветовом локусе к яркости белого, ее необходимо пересчитать, например, как это делается в системе МКО 1976 г. В этой формуле координата цвета Y пропорциональна яркости, так как кривая видности глаза полностью совпадает с кривой сложения цвета $\bar{y}(\lambda)$ колориметрической системы МКО 1931 г. (x, y, z).

Таким образом, мы подготовили четырехмерное цветовое пространство, и осталось рассмотреть тензор кривизны – тензор Риччи.

Кривизна пространства цветов различения

Выше была рассмотрена структура правой части уравнения (1). Но в уравнение Эйнштейна входит тензор кривизны – тензор Риччи. Рассмотрим структуру данного тензора. Как известно [25] тензор Риччи был получен из классического тензора кривизны путем его свертки, согласно:

$$[\tilde{R}_{rj}] = \sum_{k=1}^2 [\tilde{R}_{rkj}^k] \quad (4)$$

где $[\tilde{R}_{ij}]$ – тензор Риччи, $[\tilde{R}_{rkj}^k]$ – тензор кривизны.

Формулу (4) для тензора Риччи можно преобразовать к следующему виду:

$$[\tilde{R}_{rj}] = \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 [\tilde{g}^{rj}] \cdot [\tilde{R}_{irkj}^k] \quad (5)$$

Из тензора Риччи можно построить скаляр R по следующей формуле:

$$R = \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 [\tilde{R}_{rj}] [\tilde{g}^{rj}] \quad (6)$$

Скаляр $R(x^1, x^2)$ определенный (4.6) – есть скалярная кривизна пространства поверхности в точке с координатами x^1, x^2 . Скалярная кривизна – это полная свертка тензора кривизны R :

$$R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [\tilde{R}_{ij}^{ij}] \quad (7)$$

Переход от компонент тензора $[\tilde{R}_{ij}^{kr}]$ к скалярной кривизне R – это на первый взгляд потеря информации, т.е. девять величин заменяются одной. Однако в двумерном случае никакой потери информации не происходит. Действительно компоненты тензора кривизны $[\tilde{R}_{ij}^{kr}]$ кососимметричны как по верхней паре индексов, так и по нижней паре индексов. При совпадении $k=r$ или $i=j$, они зануляются. Единственные ненулевые компоненты – это $R_{12}^{12}, R_{12}^{21}, R_{21}^{12}$ и R_{21}^{21} , причем

$R_{12}^{12} = R_{21}^{21} = -R_{12}^{21} = -R_{21}^{12}$. Тогда, в силу сказанного, получаем:

$$R = R_{12}^{12} + R_{21}^{21} = 2R_{12}^{12} \quad (8)$$

Рассмотрим рис. 5 [26]. Проведем плоскость P касательную к поверхности сферы. Через точку M касания перпендикулярно этой плоскости рассечем поверхность двумя взаимно перпендикулярными плоскостями N_1 и N_2 . На поверхности образуются две пересекающиеся в точке M кривые A_1MB_1 и A_2MB_2 . Тогда средняя кривизна поверхности в точке M есть величина:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad (9)$$

где R_1 – радиус кривизны и кривизна первой кривой в точке M ; R_2 – тоже самое, но для второй кривой.

В случае сферической поверхности $r_1 = r_2 = r_0$ имеем:

$$R = \frac{2}{r_0} \quad (10)$$

Таким образом, были окончательно получены все компоненты уравнения (1). Но перед тем как решать это уравнение, необходимо определить и конкретизировать тензор энергии-импульса, что и будет сделано в следующем подразделе.

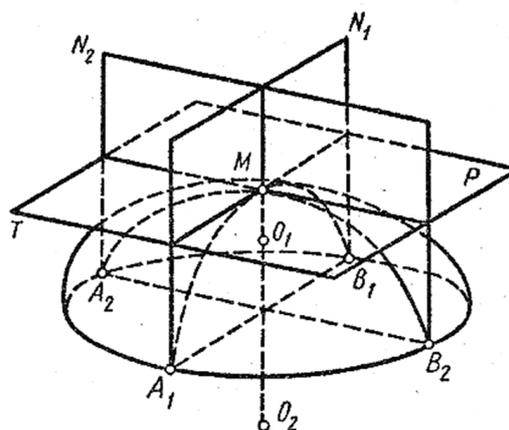


Рис.5. Кривизна поверхности

Тензор энергии-импульса цвета

Перепишем тензор энергии-импульса (3) [22]:

$$[\tilde{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} W & S_z/c & S_y/c & S_x/c \\ S_z/c & \hat{\partial}_{xx} & \hat{\partial}_{xy} & \hat{\partial}_{xz} \\ S_y/c & \hat{\partial}_{yx} & \hat{\partial}_{yy} & \hat{\partial}_{yz} \\ S_x/c & \hat{\partial}_{zx} & \hat{\partial}_{zy} & \hat{\partial}_{zz} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Что бы не путать этот тензор, введем новое обозначение с новыми компонентами, при этом физический смысл нового тензора энергии-импульса цвета не должен отличаться от тензора энергии-импульса.

Обозначим этот тензор энергии-импульса цвета $[\tilde{C}_{ij}]$. Для обозначения новых компонент этого тензора, обратимся к рис. 6.

В (11) существует плотность энергии W . Очевидно, эта плотность энергии будет соответствовать значению плотности яркости эллипса Мак Адама. Согласно определению Мак Адама данный эллипс, а с учетом яркости - будет эллипсоид, является порогом цветоразличения и яркости. Значит, с точки зрения глаза, данный эллипсоид будет восприниматься как геометрическая точка, никаких цветовых, так и яркостных различий по области (и внутри тоже) не будет. Поэтому плотность световой энергии будет равна яркости точки, например центра эллипса (рис. 6). Поскольку эти эллипсы Мак Адам получил в своих опытах (измеряя координаты цвета) еще в первой половине прошлого столетия, и фактически в наше время достаточно трудно повторить эти опыты, то была разработана специальная программа, позволяющая по изображению эллипсов на цветовом локусе определять координаты любой точки и ее яркость.

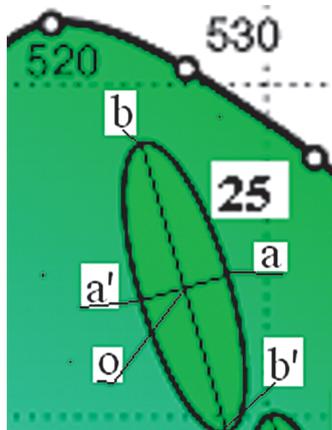


Рис. 6. Отдельно взятый эллипс Мак-Адама

Несколько слов о яркостях точек эллипсов Мак-Адама. Для определения яркости указанных точек поступим следующим образом. Предположим, что цветность каждой точки эллипса создается с помощью монохромных излучателей (два спектральных цвета). При вычислении яркости спектральных цветов можно поступить следующим образом [27]. Взяв кривую видности глаза (рис. 7), можно в соответствии с длиной волны спектрального цвета цветового локуса определить относительную величину ощущения яркости по этой кривой.

Для не спектральных цветов цветового локуса, например, для цветов эллипсов Мак-Адама, а также для построения сетки на локусе, данный метод не может быть использован, так как насыщенность цвета внутри области локуса уменьшается.

Для преобразования плоского двумерного цветового пространства x, y системы МКО 1931 г. была разработана специальная компьютерная программа, которая позволяет снять координаты любой точки экрана (в координатах экрана) и произвести запись координат в базу данных.

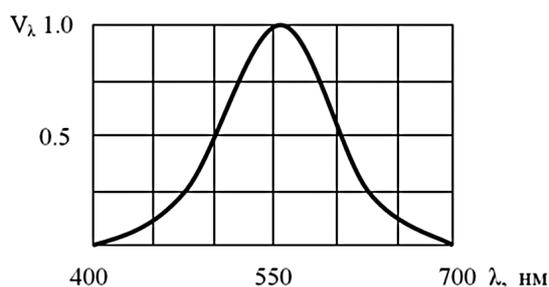


Рис. 7. Кривая видности глаза

Согласно закону Вебера-Фехнера, порог различения по яркости составляет 0,01 от текущей яркости [26]. Таким образом, были определены все координатные данные эллипсов. В этих «измерениях» была использована колориметрическая цветовая система МКО 1931 г. (x, y), без третьей координаты, но так как известно, что $x+y+z=1$, то, третью координату z легко вычислить. Для преобразования полученных координат из МКО 1931 г. (x, y, z) в координаты МКО 1960 г. (u, v, w) использовались известные формулы, при этом $w=1-u-v$.

Значения S_x, S_y и S_z в (11) будет определяться яркостью в точках a, b и d (на рис. 6 эта точка совпадает с точкой O , но лежит на оси перпендикулярной плоскости рисунка). Расстояние от точки O до точки d равно 0,01 значения яркости в точке O . ∂'_{ij} - тензор напряжений, тензор в обычном трехмерном пространстве второго ранга, состоящий из девяти величин, представляющих для нашего случая изменения яркости в этих точках, относительно яркости центра эллипсоида, отнесенные к его площади поверхности.

Площадь поверхности эллипсоида определяется [17]:

$$S = 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right), (\text{для } a > b)$$

$$S = 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right) \right), (\text{для } a < b)$$

где a , b и d – полуоси эллипсоида. Перепишем полученный тензор энергии-импульса цвета:

$$[\tilde{c}_{ij}] = \begin{bmatrix} L_0 & L_d & L_a & L_b \\ L_d & (L_d - L_0)/S & (L_a - L_0)/S & (L_b - L_0)/S \\ L_a & (L_a - L_0)/S & (L_a - L_0)/S & (L_b - L_0)/S \\ L_b & (L_b - L_0)/S & (L_a - L_0)/S & (L_b - L_0)/S \end{bmatrix} \quad (12)$$

Перепишем метрический тензор, в соответствии с нашими данными:

$$[\tilde{g}_{ij}] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

где $r_0 = 0,0038/2$, $0,0038$ – величина порога цветоразличения; r – радиус сферы цветового тела; θ – зенитный угол от начало координат, расположенных в центре цветового тела, в направлении центра эллипсоида.

Радиус сферы цветового тела зависит от величины яркости и для современных экранов телевизионных приемников может достигать значения 9000. Эта число равно динамическому диапазону по яркости, воспроизводимой на экране телеприемника. У современных экранов динамический диапазон может доходить до 9000 (1:9000).

Решение уравнения

Выше были описаны все компоненты уравнения (1). Тогда согласно этому, запишем уравнение, которое и требуется решить, при этом заменим ранее определенные величины их значениями:

$$\frac{2}{r_0} \cdot [E] - \frac{1}{r_0} \cdot [\tilde{g}_{ij}] = [k_{ij}] \cdot [\tilde{c}_{ij}] \quad (13)$$

где $[k_{ij}]$ диагональная матрица констант, пропорциональных коэффициентам «подвижности» репера, в базе подвижного

репера в пространстве геометрии Римана; $[E]$ единичная диагональная матрица, размерностью 4×4 . При численном решении (13) нам и надо определить эту константу. Из-за ограничения объема статьи, опустим математические выводы и запишем конечное уравнение. При этом цветовое различие двух цветов Ц1 и Ц2, имеющие отличные яркости находятся на разных концентрических сферах, радиус которых однозначно определяется яркостью цвета (рис. 8).

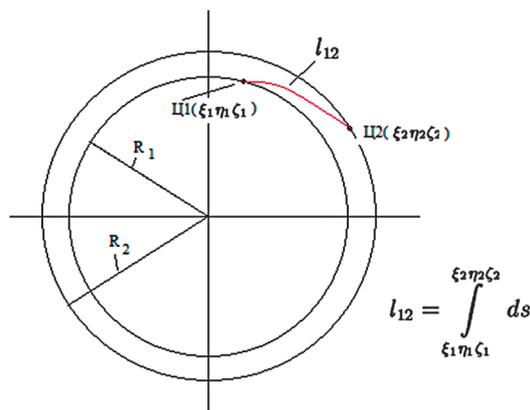


Рис. 8. Определение цветового различия двух цветов Ц1 и Ц2, имеющих отличные яркости и находящиеся на разных сферических поверхностях, радиус которых однозначно определяется яркостью цвета

На рис. 9 длина вектора OS отображает цветовую насыщенность центра эллипса Мак-Адама, а угол φ – цветовой тон.

Поскольку все вектора типа OS (рис. 9) начинаются из нулевой точки, то длина этих векторов (цветовая насыщенность) определяется простым выражением типа: $D = \sqrt{x^2 + y^2 + L^2}$ где x , y – координаты конца вектора в системе координат x' , y' , L – приведенная яркость точки конца вектора.

Итак, окончательное уравнение метрического тензора, который необходимо решить имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{2 - r_0 F^1}{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 - r_0^3 \cdot F^2}{r_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 - r_0^3 \cdot F^3}{r_0} \sin^2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \cdot U_T & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} \cdot U_H & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \cdot L_S \end{bmatrix} \quad (14)$$

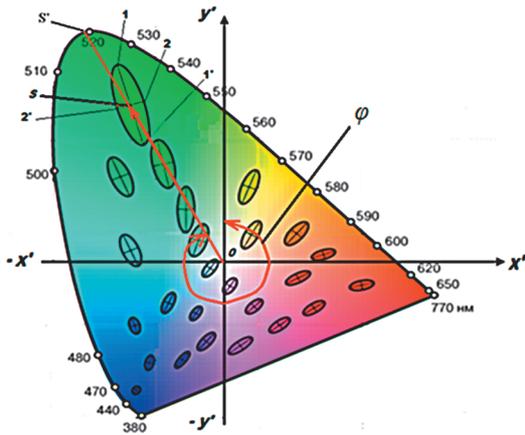


Рис. 9. Пороги Мак-Адама в системе координат $x'y'$

где $\mathcal{C}_T = \frac{v'_S}{u'_S}$ цветовой тон;

$$\mathcal{C}_H = \frac{\sqrt{(u'_S)^2 + (v'_S)^2 + (L_S)^2}}{\sqrt{(u'_S)^2 + (v'_S)^2 + (L_S)^2}}$$

цветовая насыщенность; индексы S и S' имеют значения, изображенные на рис. 9;

$$F^1 = b^2 d^2; F^2 = a^2 d^2; F^3 = a^2 b^2 (1 - d^2)$$

где a , b и d – полуоси эллипсоида; $[k_{ij}]$ диагональная матрица констант, равная коэффициентам «подвижности» репера в базисе подвижного репера и пространстве геометрии Римана (искомые величины); $[E]$ единичная диагональная матрица.

Из (14) получаем систему уравнений относительно $[k_{ij}]$:

$$\begin{cases} K_{11} = \frac{(2 - r_0 \cdot F^1) \cdot \mathcal{C}_T}{r_0}; \\ K_{22} = \frac{(2 - r_0^3 \cdot F^2) \cdot \mathcal{C}_H}{r_0}; \\ K_{33} = \frac{(2 - r_0^3 \cdot F^3) \cdot \sin^2(\theta) L_S}{r_0}. \end{cases} \quad (15)$$

На рис. 10 и 11 приведены результаты решения (14) с учетом изложенного математического аппарата. Это решение было выполнено для колориметрической системы МКО 1931 г. ($x'y'$).

Очевидно, применяя вышеуказанную методику, можно преобразовать цветное пространство (цветовой locus) в пространстве Римана. Так, например, если изобразить сферу, радиус которой равен величине максимальной яркости (яркость «белого» цвета) для системы МКО 1931 г. ($x'y'$), а на поверхность этой сферы нанести цветовой locus, причем сохраняя переход от метрического плоского пространства к пространству Римана, используя при этом базис подвижного репера, то получим криволинейное цветное пространство, на котором можно изобразить в этом же базисе подвижного репера пространства цветоразличения (шары Мак Адама).

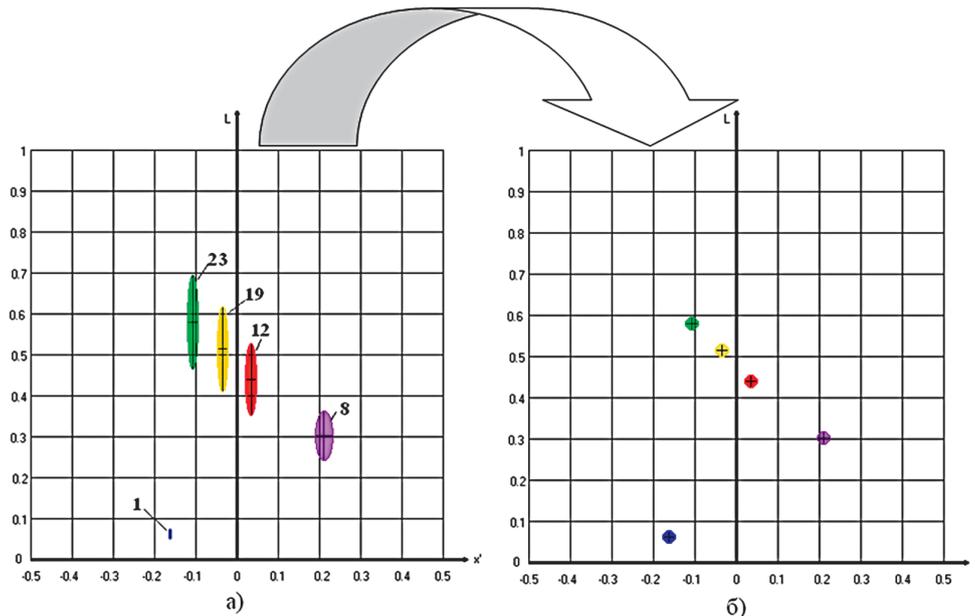


Рис.10. Сечение эллипсоидов плоскостью $x'O'L$ (а) и их преобразование в равновеликие шары (сечение той же плоскостью б). Размер эллипсоидов и шаров увеличен в 10 раз

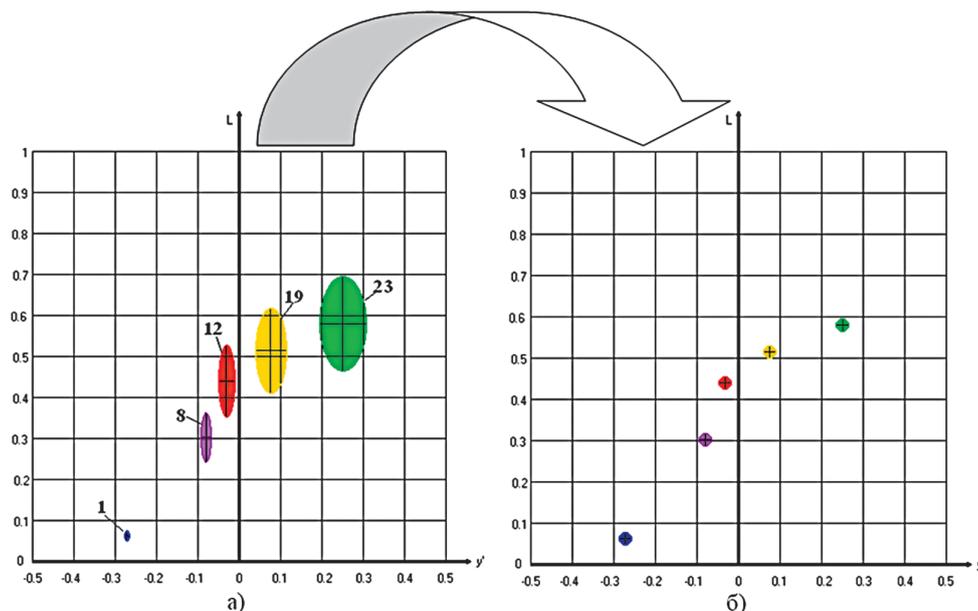


Рис. 11. Сечение эллипсоидов плоскостью $y'O'L$ (а) и их преобразование в равновеликие шары (сечение той же плоскостью б). Размер эллипсоидов и шаров увеличен в 10 раз

Вышесказанное иллюстрирует рис. 12. На этом рисунке ось яркости перпендикулярна плоскости рисунка.

При данном математическом аппарате исходные данные могут быть представлены в любой из существующих колориметрических систем МКО, будь то МКО 1960 г. (u, v). Также можно получить результаты в колориметрической системе МКО 1976 г. (Lab) [28 -30].

Кроме того, данный математический аппарат дает возможность для обратного преобразования, при этом используется матрица обратного преобразования.

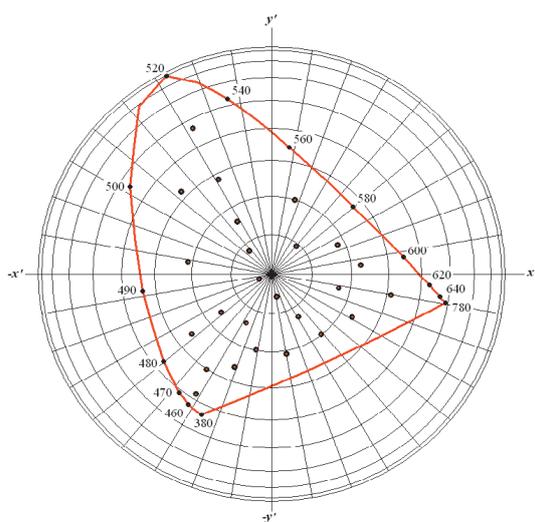


Рис. 12. Цветовой locus с эллипсами Мак-Адама в пространстве геометрии Римана. в системе МКО 1931 г. ($x'y'$)

Заключение

В заключение приведем основные выводы. Обнаружено внешнее сходство между состоянием пространства-времени и цветовым пространством.

На основании этого сходства для разработки абсолютно равноконтрастного цветового пространства было применено уравнение А. Эйнштейна.

Решение данного уравнения производилось в стандартном четырехмерном пространстве, в котором использовалось трехмерное метрическое пространство uvw (системы МКО 1960 г.) и четвертое измерение – яркость, это позволило создать строго равноконтрастное четырехмерное цветовое пространство. Аналогично был произведен расчет и для трехмерного цветового пространства.

В качестве исходного цветового пространства можно использовать любое из известных цветовых пространств, и на выходе будут получены равные сферы порогов цветоразличия.

Полученное цветовое тело представляет собой сферу, радиус которой зависит от конкретной точки, изображающей цвет.

Цветовая разница между двумя цветами в полученной строго равноконтрастной цветовой системе определяется, как длина дуги, связывающей два цвета, лежащих на различных поверхностях концентрических сферах.

Применение разработанной строго равноконтрастной колориметрической систе-

мы в телевидении позволяет, при яркости изображения меньше пороговой чувствительности колбочек глаза, не передавать сигналы цветности, так как глаз человека не способен воспринимать при этом цвет. Это явление позволяет уменьшить информационную нагрузку на канал связи.

Разработанная методика позволяет осуществлять обратные преобразования к исходному цветовому пространству.

Список литературы

1. Светотехнические изделия. СИ – 10. Фотоэлектронные приборы для цветовых и спектральных измерений
2. Munsell A., Sloan T., Godlove I., Neutral value scales I, Munsell neutral value scale, / Opt. Soc. Am., 23, 394 1933.
3. Полосин Л. Л. Цветовая фотометрия в телевидении. 9-я Международная конференция «Телевидение: передача и обработка изображения» Санкт-Петербург, ГЭТУ. 26-27 июня 2012г. труды конференции. С. 19-20.
4. Newhall fS., The ratio method in the review of the Munsell colors, Am. J. Psychol., 52, 394 1939.
5. Jimenez J.R., Hita E., Romero J., Jimenez L. Scalar curvature of space as a source of information of new uniformity aspects concerning to color representation systems. [Text] – in J.: Optics (Paris), vol. 24, № 6, 1993. P.243-249.
6. Mac Adam D.L. Visual sensitivities to color differences. [Text]/ D.L. Mac Adam//Josa. – 1943. - Vol. 33. - № 18
7. Mac Adam D.L. Color essays. [Text]/ D.L. Mac Adam//Josa – 1975. - Vol. 65. - № 5, - P. 463-485.
8. Mac Adam D.L. Specification of small chromaticity differences. [Text]/D.L. Mac Adam//Josa. – 1943. -Vol.33. -P.18-26.
9. Mac Adam D.L. Geodesic chromaticity diagram based on variances of color matching by 14 normal observers. [Text]/D.L. Mac Adam// Appl. Optics. – 1071. –Vol.10. - № 1
10. Mac Adam D.L. Visual sensitivities to color differences in day light. [Text]/D.L. Mac Adam//Josa. – 1942. –Vol. 32. - № 24 – p. 28-36
11. Stiles W., 18th Thomas Young oration; The basic data of colour-matching [Text], Phys. Soc. Year Book, 44 (1955).
12. Джадд Д. Цвет в науке и технике. Пер. с английского под ред. Л.Ф. Артюшина. [Текст]/Д. Джадд, Г. Выщещки// -М., -1978.-С.428.
13. Ложкин Л.Д. Web-сайт по информационным технологиям: свидетельство об отраслевой регистрации разработки № ОФАП 12111 / Л.Д. Ложкин. №; ВНИИЦ заявл. 11.01.2009; дата регистр. 16.01.2009. URL: http://ofap.ru/rto_files/12111.doc от 16.01.2009.
14. Ложкин Л.Д. Образовательный web-сайт по информационным технологиям: свидетельство об отраслевой регистрации разработки № 11710 / Л.Д. Ложкин. Nom. Gos. Per. 50200802240; заявл. 10.11.2008; дата регистр. 14.11.2008
15. Ложкин, Л.Д. Дифференциальная колориметрия (Монография) / Л.Д. Ложкин. – Самара: ИУНЛ ПГУТИ, 2010. – 320 с.
16. Ложкин Л.Д. Равноконтрастное цветовое пространство и пороги цветоразличения. 7-я международная конференция «Телевидение: передача и обработка изображений». Труды конференции. Санкт-Петербург, 2009. с. 85-90.
17. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Изд-во «Наука», главная редакция физико-математической литературы. М.: 1973., -с.872
18. Уравнения Эйнштейна. Интернет ресурс. <http://ru.wikipedia.org/wiki> от 16.01.2009.
19. Albert Einstein. (1916). «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». Annalen der Physik 354 (7): 769-822. (Русский перевод в сборнике: Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сборник статей / Под ред. Е. Куранского. — М.: Мир, 1979. 592 с. С. 146—196).
20. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. — М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
21. Albert Einstein. (25 ноября 1915). «Die Feldgleichungen der Gravitation». Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: 844—847.
22. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1 — 1916. — 189—196. Рус. пер.: Шварцшильд К. О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 199—207
23. Тензор энергии-импульса. [Интернет ресурс]/Web – сайт. URL: <http://nado.znate.ru>.
24. Новаковский С.В. Цветное телевидение. Основы теории цветовоспроизведения. [Текст]/С.В. Новаковский// – М.: Связь. - 1975. –С.376.
25. Шарипов Р.А. Курс дифференциальной геометрии. Башкирский государственный университет. Уфа. -1996. -210 с.
26. Астрономический календарь. Постоянная часть. Издание шестое. Под редакцией Бакулин П. И. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы., - М.:, 1973, с.728.
27. Ложкин, Л.Д. Дифференциальная колориметрия (Монография) / Л.Д. Ложкин. – Самара: ИУНЛ ПГУТИ, 2010. – 320 с.
28. Ложкин Л.Д. Равноконтрастное цветовое пространство. 8-я Международная конференция «Телевидение: передача и обработка изображения» Санкт-Петербург, ГЭТУ. 30-31 мая 2011г. труды конференции. С. 31-34.
29. Ложкин Л.Д., Неганов В.А. Нетрадиционный метод разработки равноконтрастного цветового пространства для телевидения. Жур. Физика волновых процессов и радиотехнические системы Том 14, № 2,2011, с.102-109 .
30. Ложкин Л.Д. Пороги цветоразличения и уравнения Эйнштейна. Жур. Инфокоммуникационные технологии. Том 9, № 3 – 2011, с.86-89.